OPERAZIONI CON I POLINOMI

In questa sezione si mostrerà come risolvere espressioni conenenti una variabile (che sarà sempre x, ma nulla cambierebbe se fosse una lettera diversa, purché una sola). Prima bisogna però introdurre il concetto di omogeneità.

Termini omogenei e opposti

Due monomi sono omogenei se hanno la stessa parte letterale. Un termine è un monomio o un termine noto (ovvero un numero). Due termini sono omogenei se sono monomi omogenei o se sono entrambi termini noti. Due monomi omogenei si dicono opposti se hanno coefficienti opposti (in coefficiente di un termine noto è il numero stesso). Pertanto sono opposti $3x$ e $-3x$, come lo sono 3 e -3, ma non lo sono 3 e $-3x$, in quanto non omogenei.

Somma di monomi omogenei

La somma di monomi è un monomio omogenei è un altro monomio omogeneo avente come coefficiente la somma dei coefficienti. Ecco alcuni esempi, ricordando che l'assenza di coefficiente sta a significare che questo vale 1, mentre in presenza del solo segno negativo, esso vale -1, e che se il coefficiente è 0, è inutile scrivere la parte letterale.

$$4x - 2x + -5x = -3 \qquad x + 6x - 2x = 5x \qquad -4x - 3x + 9x = 2x$$

$$8x - 2x - 5x = x \qquad 6x - 3x - 3x = 0 \qquad 4x - 6x + x = -x$$

L'operazione sarebbe possibile anche in presenza coefficienti frazionari, ma si vedrà in seguito un metodo diverso.

Prodotto di un numero per un monomio

Il prodotto di un numero per un monomio è un monomio omogeneo il cui coefficiente è il prodotto del numero per il coefficiente originale: come si è visto per il coefficente di un monomio, il segno di moltiplicazione può essere omesso. Nulla di diverso in presenza di frazioni (in cui possono essere applicate le regole per la semplificazione del prodotto)

$$2(3x) = 6x \qquad 4(-2x) = -8x \qquad -3(-x) = 3x \qquad -5(2x) = -10x$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x\right) = \frac{3}{8}x \qquad -\frac{4}{3}\left(\frac{3}{10}x\right) = -\frac{2}{5}x \qquad \frac{4}{5}\left(-\frac{5}{8}x\right) = -\frac{1}{2}x$$

Semplificazione di polinomi interi

Un polinomio, definito in modo esteso, è una somma algebrica di monomi e di termini noti: tuttavia esso può sempre essere ridotto ad una somma di un monomio e un termine noto (o anche solo uno dei due) sommando i monomi e sommando i termini noti (le due operazioni vanno svolte indipendentemente l'una dall'altra). Ecco un esempio (a destra le due sommatorie)

$$7x - 5 + 2x - 4 + 3 - 4x = 5x - 6 \qquad 7x + 2x - 4x = 5x \qquad -5 - 4 + 3 = -6$$

Se uno dei due termini risulta zero, rimane solo l'altro, se entrambi risultano zero il risultato è zero.

$$5x - 2 - 3x + 1 - 2x + 3 = 2 \qquad 7x - 4 - 3x + 2 - 4x - 5 = -7 \qquad 6 - 2x - 3 - 2x - 3 + 4x = 0$$

In particolare, coppie di termini opposti possono essere eliminate, prima di svolgere la somma. Ecco un esempio, in cui si evidenziano due coppie di opposti, che possono essere trascurate.

$$\overline{4} \quad \underline{-2x} \quad -5x \quad +3 \quad \overline{-4} \quad \underline{+2x} \quad -5 \quad +4x \qquad = -x - 2$$

Di fatto, nell'esempio precedente, ci si riduce a semplificare il polinomio $-5x + 3 - 5 + 4x$

Denominatore comune

Dato un polinomio (non necessariamente semplificato) a coefficienti frazionari, esso si può scrivere come un polinomio a coefficienti interi frazionato per un unico numero. In maniera simile alle frazioni numeriche, il denominatore comune è il minimo comune multiplo tra i denominatori presenti, e i nuovi coefficienti si ottengono dividendolo per il denominatore originale (1 se non c'è) e moltiplicandolo per il numeratore originale (1 se non c'è) ; la parte letterale non viene in alcun modo modificata. Ecco alcuni esempi con polinomi semplificati.

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = \frac{4x-3}{6} \qquad -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} = \frac{-3x+10}{4} \qquad -x - \frac{2}{3} = \frac{-3x-2}{3} \qquad \frac{7}{5}x + 2 = \frac{7x+10}{5}$$

Se il polinomio non è semplificato, non sarebbe sbagliato semplificarlo prima di metterlo a denominatore comune, ma conviene scambiare le due operazioni, cioè metterlo a denominatore comune e poi svolgere la semplificazione su un polinomio intero.

$$\frac{5}{6}x - 2 + x + \frac{3}{4} = \frac{10x - 24 + 12x + 9}{12} = \frac{22x-15}{12}$$

Tuttavia se ci sono coppie di opposti, allora conviene eliminarle prima di portare il polinomio a denominatore comune

$$\underline{\frac{3}{4}x} - \frac{2}{3} \underline{- \frac{3}{4}x} + 1 - \frac{1}{2}x = \frac{-4+6-3x}{6} = \frac{-3x+2}{6} \qquad \underline{-\frac{1}{5}} + \frac{3}{4}x + \frac{1}{6} - x \underline{+\frac{1}{5}} = \frac{9x+2-12x}{12} = \frac{-3x+2}{12}$$

Prodotto di un numero per un polinomio

Il numero viene moltiplicato per ognuno dei termini del polinomio: se esternamente c'è solo un segno negativo, si moltiplica per -1, ossia si cambiano tutti i segni nella parentesi, se c'è soltanto un segno positivo il polinomio rimane inalterato.

$$2(3x-5) = 6x-10 \qquad -3(2x+5) = -6x-15 \qquad 4(-2x-1) = -8x-4 \qquad -(5x+3) = -5x-3$$

Se il polinomio non è semplificato, vanno svolte sia la semplificazione che la moltiplicazione: l'ordine di svolgimento è interscambiabile, tuttavia conviene svolegere prima il prodotto (non sarebbe comunque sbagliato semplificare prima di moltiplicare)

$$-3(-4x+5+x-7) = -3(-3x-2) = 9x+6 \qquad -(4x+3-2x+5) = -4x-3+2x-5 = -2x-8$$

Se i coefficienti sono frazionari vanno anche poste allo stesso denominatore: l'ordine consigliato è quello di svolgere il prodotto, poi portare a denominatore comune, infine semplificare.

$$\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} + x - \frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9} = \frac{-18x - 9 + 24x - 4}{36} = \frac{6x-13}{36}$$

Espressioni letterali

In presenza di prodotti e somme, conviene svolgere i prodotti in maniera da eliminare le parentesi e svolgere globalmente le operazioni del denominatore comune (se ci sono frazioni) e della semplificazione

$$3(-2x+5) - 4(x+2) - (2x+1) = -6x + 15 - 8x - 4 - 2x - 1 = -16x - 11$$

$$-\frac{2}{3}(\frac{1}{4}x+1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2x+1) + 3(1 - \frac{2}{9}x) = -1/6x - 2/3 + 1/2 + x + 1/2 + 3 - 2/3x = (-x-4+3+6x+3+18-4x)/6 = (x+20)/6$$

Unica semplificazione che conviene svolgere subito dopo i prodotti è, ancora una volta, quella di eliminare eventuali coppie di opposti:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(3x-5) - \left(2x + \frac{5}{2}\right) + x + 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} - 2x - \frac{5}{2} + x + 1 = \frac{1 - 3x - 4x + 2x + 2}{2} = \frac{-5x+3}{2}$$