Equazione a due incognite implicite ed esplicite

Un'equazione implicita a due incognite è un polinomio di primo grado a due variabili (generalmente x e y) eguagliato a 0. Ecco alcuni esempi:

$$3x - 2y + 1 = 0 \qquad -x - 5y = 0 \qquad -\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4} = 0$$

Un'eqazione è esplicita se uno dei due membri (normalmente quello a sinistra) consiste semplicemente in una variabile, lasciando dall'altra parte l'altra variabile e/o il termine noto. Ecco quattro esempi: le prime due equazioni sono esplicite rispetto a x, le altre due rispetto a y

$$x = 3y - 2 \qquad x = -\frac{2}{3}y + \frac{3}{4} \qquad y = x \qquad y = -\frac{1}{3}$$

Esplicitazione di una variabile

Un'equazione implicita può essere esplicitata rispetto ad una variabile, usando i principi di equivalenza delle equazioni, che valgono anche con due incognite. Ovvero si lascia a sinistra solo il monomio contenente tale variabile spostando a destra (cambiandone il segno) tutto il resto e poi dividere per il coefficiente. Ecco, ad esempio, come l'equazione $3x + 5y + 2 = 0$ si esplicita prima a x e rispetto a y

$$3x + 5y - 2 = 0 \longrightarrow 3x = -5y + 2 \longrightarrow x = -\frac{5}{3}y + \frac{2}{3}$$

$$3x + 5y - 2 = 0 \longrightarrow 5y = -3x + 2 \longrightarrow y = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}$$

Ecco un altro esempio: l'equazione $x - 3y - 1 = 0$. Dato che x non ha coefficiente, nell'esplicitazione non serve il secondo passaggio:

$$x - 3y - 1 = 0 \longrightarrow x = 3y + 1$$

Per quanto riguarda, sempre nella stessa equazione, l'esplicitazione di y, essendo il suo coefficiente negativo, é necessario, per eliminarlo, cambiare i segni prima della divisione.

$$x - 3y - 1 = 0 \longrightarrow -3y = -x + 1 \longrightarrow 3y = x - 1 \longrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

Come si puó notare, i monomi al di fuori di y sono stati cambiati di segno due volte. Questo suggerisce una scorciatoia: dal momento che nulla vieta di lasciare a destra la variabile che viene esplicitata, si puó spostare a destra tale variabile nel primo passaggio, lasciando invariato il resto. Il risultato ottenuto è lo stesso (scambiare i membri di un'equazione non ha alcun effetto, dal momento che le espressioni $A = B$ e $B = A$ sono del tutto equivalenti).

$$x - 3y - 1 = 0 \longrightarrow x - 1 = 3y \longrightarrow \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = y$$

Sistemi di equazioni a due incognite

Un sistema è formato da due equazioni a due incognite, ognuna delle quali può essere implicita o esplicita.
Si dice che una coppia $(.,.)$ è una soluzione del sistema se sostituendo i due valori rispettivamente a x e a y le due equazioni risultano verificate. Ad esempio, considerando il sistema

$$\begin{cases} x = 3y - 5 \\ 2x - 4y + 6 = 0 \end{cases}$$

la coppia $(1, 2)$ è una soluzione in quanto, sostituendo, si ottengono le uguaglianze (verificate)

$$\begin{cases} 1 = 3 \cdot 2 - 5 \\ 2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 6 = 0 \end{cases}$$

Sistemi elementari

Un sistema elementare è formato da un'equazione in cui si dichiara il valore di una variabile, mentre l'altra equazione é esplicita rispetto all'altra variabile. Si suppone per il momen to che la variabile dichiarata sia x: per trovare y basta sostituire il valore dichiarato di x nell'equazione esplicita. A questo punto si puó scrivere la coppia (x, y) che costituisce la soluzione.

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -x + 1 \end{cases} \qquad y = -(-2) + 1 = 2 + 1 = 3 \longrightarrow (-2, 3)$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases} \qquad y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3} \longrightarrow \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Se la variabile dichiarata è y, si trova la x con lo stesso procedimento: la soluzione va comunque scritta nella forma (x, y)

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = \frac{3}{4}y - \frac{1}{2} \end{cases} \qquad x = \frac{3}{4} \cdot 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \longrightarrow \left(\frac{1}{4}, 1\right)$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{4} \end{cases} \qquad x = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0 \longrightarrow \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

Sistemi espliciti

Un sistema di equazioni esplicite rispetto a y si risolve nel seguente modo:

1. Si crea un'equazione avente come membri i polinomi (in x) che compaiono nelle due equazioni
2. Si risolve questa equazione, trovando x.
3. Si trova y sostituendo il valore di x in una delle due equazioni originali, come nei sistemi elementari.
4. Si scrive la soluzione nella forma (x, y).

Sebbene per trovare il valore di y basta sostituire in una delle due equazioni, farlo con entrambe le equazioni costituisce un'utile verifica (i due risultati devono coincidere).

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -x - 3 \end{cases}$$

$$2x + 3 = -x - 3 \longrightarrow 2x + x = -3 - 3 \longrightarrow 3x = -6 \longrightarrow x = -6/3 = -2$$

$$y = 2 \cdot (-2) + 3 = -4 + 3 = -1 \qquad y = -(-2) - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$(-2, -1)$$

Come già spiegato, nel passaggio in cui si trova y, sarebbe sufficiente svolgere la sostituzione in una sola delle espressioni, benché sia consigliato di farlo con entrambe. Ecco un altro esempio:

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \\ y = x + \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = x + \frac{1}{6} \longrightarrow -4x + 4 = 6x + 1 \longrightarrow -4x - 6x = 1 + 4 \longrightarrow -10x = 5 \longrightarrow 10x = -5 \longrightarrow x = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{2}) - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \qquad y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$$

Se le equazioni sono esplicite rispetto a x, va trovato prima y. Ma la soluzione si scrive comunque nella forma (x, y) che, in tal caso, non rispecchia l'ordine in cui i due valori sono stati trovati.

$$\begin{cases} x = 2y - 5 \\ x = -4y + 4 \end{cases}$$

$$2y - 5 = -4y + 4 \longrightarrow 2y + 4y = 4 + 5 \longrightarrow 6y = 9 \longrightarrow y = 9/6 = 3/2$$

$$y = 2 \cdot \frac{3}{2} - 5 = 3 - 5 = -2 \qquad y = -4 \cdot \frac{3}{2} + 4 = -6 + 4 = -2$$

$$\left(-2, \frac{3}{2}\right)$$

Sistemi misti

Un sistema contenente un'equazione esplicita rispetto a y e una implicita si risolve nel seguente modo:

1. Nell'equazione implicita si sostituisce la y con l'espressione in x contenuta nell'equazione esplicita
2. Si risolve questa equazione (contenente un'espressione) , trovando x.
3. Si trova y sostituendo nell'equazione esplicita il valore di x appena trovato
4. Si scrive la soluzione nella forma (x, y).

$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ 3x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$3x - 2(3x - 4) - 2 = 0 \longrightarrow 3x - 6x + 8 - 2 = 0 \longrightarrow 3x - 6x = -8 + 2 \longrightarrow -3x = -6 \longrightarrow 3x = 6 \longrightarrow x = 6/3 = 2$$

$$y = 3 \cdot 2 - 4 = 6 - 4 = 2$$

$$(2, 2)$$

Un altro esempio (nulla vieta che l'equazione implicita sia scritta per prima).

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \\ 4x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$4x - 2\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right) + 3 = 0 \longrightarrow 4x - \frac{4}{3}x - 1 + 3 = 0 \longrightarrow 12x - 4x - 3 + 9 = 0 \longrightarrow 12x - 4x = 3 - 9 \longrightarrow 8x = -6 \longrightarrow x = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$y = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$$

In presenza di un'equazione esplicita rispetto a y, va trovato prima x. Ma la soluzione si scrive comunque nella forma (x, y).

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \\ 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$2x - 2\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right) + 1 = 0 \longrightarrow 2x - \frac{4}{3}x - 1 + 1 = 0 \longrightarrow 6x - 4x - 3 + 3 = 0 \longrightarrow x = 0$$

$$y = \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Dopo aver risolto il sistema, un'utile verifica consiste nel sostituire la coppia di valori nell'equazione implicita e verificare l'uguaglianza: in pratica, sostituendo i due valori nel polinomio, deve risultare 0. Ecco la sostituziona nei tre esempi visti finora:

$$3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 2 = 6 - 4 - 2 = 0 \qquad 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - 2 \cdot 0 + 3 = -3 - 0 + 3 = 0 \qquad 2 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0 - 1 + 1 = 0$$

Sistemi impliciti

Per risolvere un sistema di due equazioni in forma implicita bisogna esplicitare una due delle variabili in una delle due equazioni: quattro possibilità dunque, ottenendo sempre lo stesso risultato. A questo punto si procede come nei sistemi misti. Se una della variabili è priva di coefficiente, conviene scegliere quella, dal momento che, come visto nel paragrafo riferito all'esplicitazione, in questo caso l'operazione è più semplice.

$$\begin{cases} x + 3y + 4 = 0 \\ -2x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

La scelta migliore, in questo caso é di eslpicitare la x nella prima equazione.

$$x = -3y - 4 = 0$$

$$-2(-3y-4) - y + 2 = 0 \longrightarrow 6y + 8 - y + 2 = 0 \longrightarrow 6y - y = -8 - 2 \longrightarrow 5y = -10 \longrightarrow y = -10/5 = -2$$

$$x = -3 \cdot (-2) - 4 = 6 - 4 = 2$$

Ecco come lo stesso sistema viene risolto esplicitando la y della seconda equazione: va ricordato che, in caso di coefficiente negativo, conviene portare tale variabile a destra lasciando a sinistra tutto il resto.

$$-2x + 2 = y$$

$$x + 3(-2x+2) + 4 = 0 \longrightarrow x - 6x + 6 + 4 = 0 \longrightarrow x - 6x = -6 - 4 \longrightarrow -5x = -10 \longrightarrow 5x = 10 \longrightarrow x = 10/5 = 2$$

$$y = -2 \cdot 2 + 2 = -4 + 2 = -2$$

In entrambi i casi il risultato ottenuto è $(2, -2)$. Se in tutte le quattro occorrenze le variabili hanno un coefficiente, la risoluzione diventa più difficile, perchè esplicitando la variabile scelta ci si trova un denominatore.

$$\begin{cases} 2x + 2y - 1 = 0 \\ 6x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

Viene esplicitata la y della seconda equazione

$$6x = -3y + 2 \longrightarrow x = -\frac{3}{6}y + \frac{2}{6} = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{3}$$

$$2\left(-\frac{1}{2}y + \frac{1}{3}\right) + 2y - 1 = 0 \longrightarrow -y + \frac{2}{3} + 2y - 1 = 0 \longrightarrow -3y + 2 + 6y - 3 = 0 \longrightarrow -3y + 6y = -2 + 3 \longrightarrow 3y = 1 \longrightarrow y = \frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$$

Dopo aver risolto il sistema, un'utile verifica consiste nel sostituire i valori ottenuti nell'equazione che NON era stata esplicitata (la prima, in questo caso)

$$2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 1 = 0$$

Ecco ora la stessa equazione risolta sostituendo la x nella prima equazione

$$2x = -2y + 1 \longrightarrow x = -\frac{2}{2}y + \frac{1}{2} = -y + \frac{1}{2}$$

$$6\left(-y + \frac{1}{2}\right) + 3y - 2 = 0 \longrightarrow -6y + 3 + 3y - 2 = 0 \longrightarrow -6y + 3y = -3 + 2 \longrightarrow -3y = -1 \longrightarrow 3y = 1 \longrightarrow y = \frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$$

La verifica, in questo caso, va fatta nella seconda equazione:

$$6 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

Il risultato non sarebbe cambiato anche se si fosse esplicitata la x della seconda equazione o la y della prima.

Sistemi impossibili e indeterminati

Si è visto che, in qualsiasi caso,per trovare la prima variabile serve portarsi ad un'equazione ad una incognita. Se tale equazione risulta impossibile o indeterminata, lo stesso dicasi per il sistema: non si va avanti per trovare l'altra variabile. Ecco due esempi, uno per tipo:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}y - 1 \\ 3x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$3\left(\frac{2}{3}y - 1\right) - 2y - 1 = 0 \longrightarrow 2y - 3 - 2y - 1 = 0 \longrightarrow 2y - 2y = 3 + 1 \longrightarrow 0 = 4$$

Impossibile

Un altro esempio:

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$2x - (2x + 2) + 2 = 0 \longrightarrow 2x - 2x - 2 + 2 = 0 \longrightarrow 2x - 2x = 2 - 2 \longrightarrow 0 = 0$$

Indeterminata