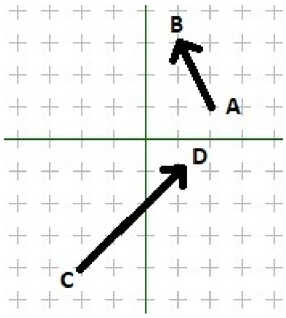
Vettori nel piano cartesiano

Dati due punti A e B, il vettore $\overrightarrow{AB}$ rappresenta il percorso del segmento orientato (in cui sia dichiarato il verso di percorrenza) che va da A verso B. Tale spostamento consiste in una componente orizzontale (positiva se B è a destra di A, negativa se a sinistra) e una verticale (positiva se B è a una quota superiore ad A, negativa se inferiore). Ecco due coppie di punti, e la rappresentazione grafica dei vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ e i rispettivi valori, ognuno dei quali espresso nella forma (x, y) che rappresentano il movimento (nelle due direzioni orizzontale e verticale) della freccia.

$A(2;1)$
$B(1;3)$

$C(-2;-4)$
$D(1;-1)$



$\overrightarrow{AB}$ $(-1;2)$

$\overrightarrow{CD}$ $(3;3)$

Il vettore si può trovare senza usare il grafico, applicando la formula BA=B-A ("arrivo" meno "partenza") ad ognuna delle due componenti, ancor più intuitiva se si scrive come $B + (-A)$ sommando la componente di B con quella di A cambiata di segno.

$$\overrightarrow{AB} = (1-2; 3-1) = (-1;2) \qquad \overrightarrow{CD} = (1+2; -1+4) = (3;3)$$

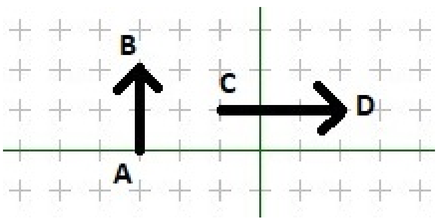
Viene quindi trovato algebricamente ciò che è stato trovato per via grafica: quest'ultima non deve mai la risoluzione del problema, ma soltanto una conferma, la vera risoluzione è quella algebrica. Va notato inoltre che scambiando gli estremi di un vettore, se ne ottiene uno di segno opposto il che risulta intuitivo sia dal punto di vista algebrico (A-B è l'opposto di B-A), sia da quello grafico (stesso segmento ma orientato nell'altrerso).o v

$$\overrightarrow{BA} = (2-1; 1-3) = (1;-2) \qquad \overrightarrow{DC} = (-2-1; -4+1) = (-3;-3)$$

Da notare inoltre che se due punti hanno la stessa coordinata orizzontale (verticale) il vettore è verticale (orizzontale), cioè la sua componente orizzontale (verticale) è 0.

$A(-3;2)$
$B(-3;0)$

$C(-1;1)$
$D(2;1)$



$\overrightarrow{AB}$ $(-3+3; 0-2) = (0;-2)$

$\overrightarrow{CD}$ $(2+1; 1-1) = (3;0)$

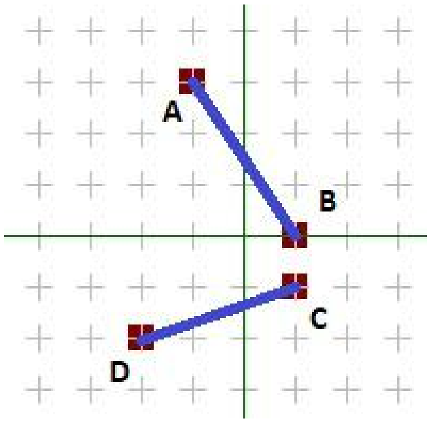
Pendenza di un segmento

Dato un vettore (x, y) non verticale la sua pendenza è data dal rapporto y/x, ovvero la coordinata verticale divisa per quella orizzontale: il fatto che il vettore non è verticale garantisce che non si sta dividendo per zero. Ecco alcuni esempi (si noti che un vettore orizzontale ha pendenza 0) Da notare che, cambiando il segno ad entrambe le componenti, si ottiene lo stesso risultato. Pertanto si può parlare di pendenza di un segmento AB, indipendentemente dal fatto che si consideri il vettore AB oppure il vettore BA: in ognuno dei due esempi seguenti (separati dalle loro rappresentazioni grafiche) vengono trovati entrambi i vettori e rispettive pendenze, ottenedo ovviamente lo stesso risultato per la pendenza (indicata con la lettera m).

$$A(-1;3) \qquad B(1;0)$$

$$\overrightarrow{AB} = (1+1; 0-3) = (2;-3) \qquad m = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\overrightarrow{BA} = (-1-1; 3-0) = (-2;3) \qquad m = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$



$$\overrightarrow{CD} = (-2-1; -2+1) = (-3;-1) \qquad m = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$C(1;-1) \qquad D(-2;-2)$$

$$\overrightarrow{DC} = (1+2; -1+2) = (3;1) \qquad m = \frac{1}{3}$$

Un segmento ha pendenza positiva (negativa) se, visto da sinistra verso destra, è in salita (discesa), come esemplificato dallo schema sottoostante.

$$\frac{\updownarrow}{\rightarrow}$$

Trovare un vettore data la sua pendenza (espressa con una frazione), è un'operazione che si svolge usando lo schema sovrastante: la pendenza N/D si asssocia al vettore (D, N) mettendo l'eventuale segno negativo alla coordinata y. Ovviamente un n umero intero va considerato come una frazione con denominatore 1: cioè un vettore di pendenza intera k è $(1, k)$. Ad esempio, un vettore di pendenza $-2/3$ è $(-3, 2)$: non è l'unico, anche il suo opposto, ovvero $(2, -3)$, ha la stessa pendenza. Sarebbero possibili anche dei multipli: ad esempio, il vettore $(6, -9)$ ha pendenza $-9/6 = -2/3$.

Applicazione di un vettore ad un punto

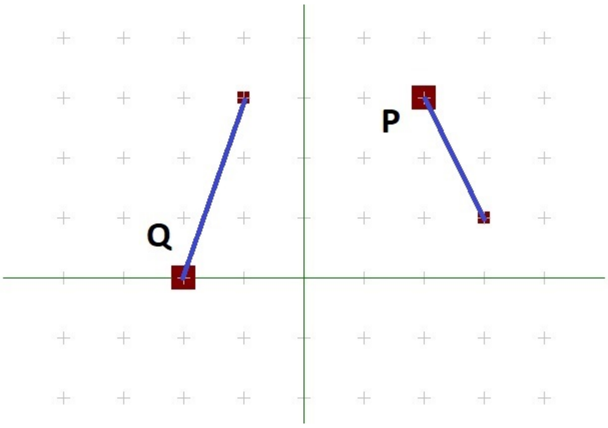
Questo argomento, che pur potrebbe anche essere affrontato algebricamente, viene mostrato solo graficamente.
Dato un punto P e un vettore v, l'applicazione di v in P è il punto di arrivo di un vettore v che parte da P. Ecco due esempi: ai punti P e Q vengono applicati rispettivamente v_P e v_Q.

$$P(2;3)$$

$$Q(-2;0)$$

$$v_P(1;-2)$$

$$v_Q(1;3)$$



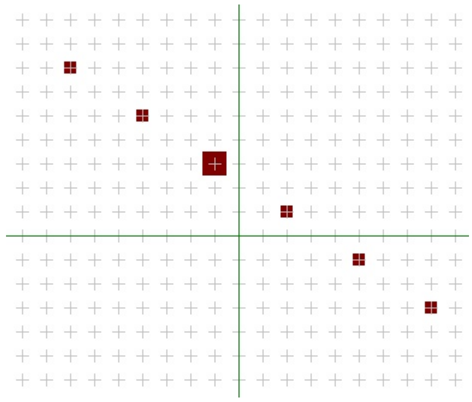
Applicazione bifrontale e ripetuta di una pendenza

Applicando un vettore ad un punto, si ottiene un nuovo punto; a questo può essere ancora applicato il vettore, ottenendo un nuovo punto, al quale si può applicare ancora il vettore, e così via si può proseguire all'infinito: si può così parlare di un'appliocazione ripetuta.
L'applicazione bifrontale di un vettore ad un punto consiste nell'applicare il vettore e quello opposto, in questo modo il punto originale si trova ad essere il punto medio tra i due nuovi punti: se si parla di applicazione bifrontale e ripetuta la propagazione si svolge in entrambi i versi: i punti che si ottengono sono tutti allineati, cioè collegabili tramite una linea reatta.

Applicazione bifrontale e ripetuta

del vettore $(\mathbf{-3}; \mathbf{2})$

al punto $(\mathbf{-1}; \mathbf{3})$



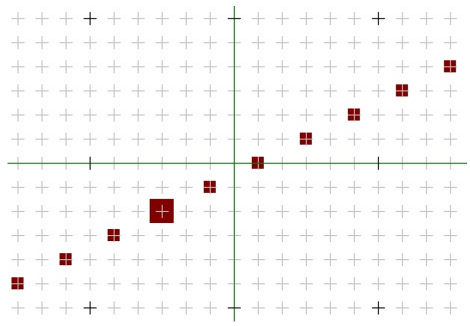
Se anziché il vettore viene dichiarata la pendenza, basta trovare un vettore di tale pendenza. Nell'esempio precedente è stato applicato al punto $(-1; 3)$ un vettore di pendenza $-\frac{2}{3}$: la bifrontalità dell'applicazione fa sì che nulla cambi se, anziché il vettore $(-3; 2)$ si fosse invece usato l'opposto vettore $(3; -2)$. Se si fosse usato un multiplo, ad esempio $(-6, 4)$, i punti da rappresentare sarebbero stati tra quelli ottenuti applicando il vettore $(-3; 2)$: per l'esattazza la metà, alternativamente uno no e uno sì partendo dal punto originale. E la retta su cui i punti giacciono non sarebbe cambiata.

Si era visto in precedenza come, per rappresentare un punto a coordinate frazionarie, bisogna prima portare tali coordinate allo stesso denominatore. Lo stesso vale per i vettori. Ma l'aspetto più importante riguarda la pendenza: se le coordinate di un vettore hanno lo stesso denominatore, esso può essere trascurato. Si supponga, per esempio, di dover trovare la pendenza del vettore $(2/3, 3/4)$. Esso, portando le coordinate allo stesso denominatore, diventa $(8/12, 9/12)$, e la sua pendenza è $9/8$ (il comune denominatorew 12 non viene preso in considerazione). Pertanto, se è necessario rappresentare l'applicazione bifrontale e ripetuta di in vettore a coordinate frazionarie, queste ultime vanno portate allo stesso denominatore, mentre per quanto riguarda il vettore si procede normalmente, senza badare al comune denominatore delle coordinate del punto.

Applicazione bifrontale e ripetuta

di un vettore di pendenza $\mathbf{\frac{1}{2}}$

al punto $(-\mathbf{\frac{1}{2}}; -\mathbf{\frac{1}{3}})$



Le coordinate del punto sono state trasformate in frazioni con denominatore 6: sul grafico tale denominatore viene praticamente ignorato (a parte il fatto che ogni sei quadretti si mette in evidenza la tacca), e il punto viene rappresentato come fosse $(-3, -2)$. Su di esso è stato applicato il vettore $(1, 2)$: sarebbe in realtà il vettore $(1/6, 2/6)$ se si considerassero le giuste unità di misura, ma non cambia niene per quanto riguarda il rapporto fra le due coordinate.