Definizione delle funzioni tramite formula

Dati due insiemi A e B, una funzione f da A a B può essere definita tramite formula, ovvero tramite un'espressione definita tramite una variabile (che in questo caso è x) attraverso la quale, per ogni elemento d del dominio, si può trovare $f(d)$ in due passaggi: Ora, per ogni elemento d del dominio, il calcolo di $f(d)$ si svolge in due passaggi:

1. Sostituire la variabile con d nella formula
2. Calcolare il risultato

Ecco un esempio: sia

$$V = \{\text{le vocali dell'alfabeto italiano}\} \qquad L = \{\text{le lettere dell'alfabeto italiano}\}$$

$$F : V \longrightarrow L \qquad F(x) = \text{la lettere che segue } x \text{nell'alfabeto italiano}$$

Si ha pertanto (da notare che nel primo passaggio ci si limita a sostituire, senza preoccuparsi del senso dell'affermazione)

$$F(a) = \text{la lettere che segue } a \text{ nell'alfabeto italiano} = b$$

e allo stesso modo (per brevità si fa in un passaggio solo, saltando il risultato intermedio)

$$F(e) = f \qquad F(i) = l \qquad F(o) = p \qquad F(u) = v$$

In questo modo da una definizione tramite formula si è ottenuta una definizione per elencazione.
In questo caso il dominio è l'intero insieme di partenza l'insieme di partenza. Ma non sempore è così, perché per qualche elemento x del dominio potrebbe non esistere $f(x)$. Ad esempio la funzione F precedente, se si allargasse il dominio a tutto l'insieme L delle lettere dell'alfabeto, si otterrebbe l'elencazione

$$F(a) = b \qquad F(b) = c \qquad F(d) = e \qquad ......F(t) = u \qquad F(u) = v \qquad F(v) = z$$

ma non esiste l'elemento

$$F(z) = \text{la lettere che segue } z \text{ nell'alfabeto italiano}$$

pertanto z non fa parte del dominio, che in questo caso si riduce a $L \setminus \{z\}$. Un altro esempio (l'insieme L è sempre lo stesso)

$$G : \mathbb{N} \longrightarrow L \qquad G(n) = \text{la } n^a \text{ lettera della parola bar}$$

si definisce per elencazione (si riporta il passaggio intermedio solo per il primo elemento, gli altri vengono svolti rapidamente

$$G(1) = \text{la } 1^a \text{ lettera della parola bar} = b \qquad G(2) = a \qquad G(3) = r$$

ma non esiste una 4^a lettera, e in generale nessuna n^a lettera con $n > 3$. Pertanto il dominio di G è l'insieme $\{1, 2, 3\}$.

Un altro esempio: da notare come nella definizione della formula, può comparire come variabile da sostituire qualsiasi simbolo, non necessariamente una lettera (come la x o la n negli esempi precedenti).

$$C = \{\text{i comuni italiani}\} \qquad R = \{\text{le regioni d'Italia}\}$$

$$f : C \longrightarrow R \qquad f(\diamond) = \text{la regione in cui si trova } \diamond$$

L'elencazione completa si compone di diverse migliaia di elementi, ma alcuni di questi sono:

$$f(Verona) = Veneto \qquad f(Foggia) = Puglia \qquad f(Terni) = Umbria$$

Il dominio è l'intero insieme C, visto che tutti i comuni appartengono ad una regione.
Sempre con gli stessi insiemi, la funzione

$$g : C \longrightarrow R \qquad f(\sqcap) = \text{la regione il cui capoluogo è } \sqcap$$

dà come risultato, per esempio:

$$g(Milano) = \text{ la regione il cui capoluogo è Milano} = Lombardia$$

ma non esiste

$$g(Brescia) = \text{ la regione il cui capoluogo è Brescia}$$

Il dominio di g è pertanto costituito dai capoluoghi di regione.

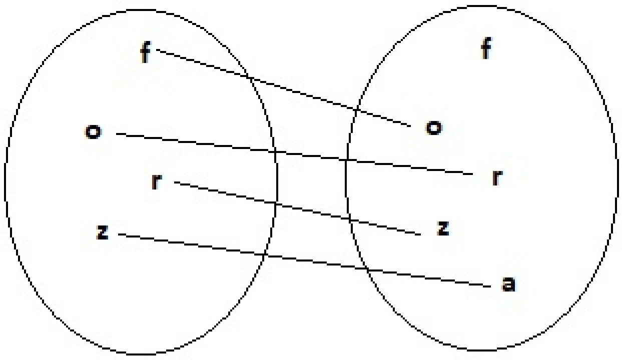
Una funzione può essere anche rappresentata anche tramite diagramma dopo averla definita per elencazione: ecco un esempio (l'insieme L è ancora quello delle lettere dell'alfabeto).

$R = \{$le lettera della parola *forza*$\}$ $\quad$ $T : R \longrightarrow R$ $\quad$ $T(\alpha) = \{$la lettera che segue αnella parola *forza*

La sua rappresentazione per elencazione è:

$$T(f) = o \qquad T(o) = r \qquad T(r) = z \qquad T(z) = a$$

Il dominio è $R \setminus \{a\}$ (l'ultima lettera, che non ne ha di successive, ne resta esclusa) e questa è la rappresentazione tramite diagramma



Formule per funzioni naturali

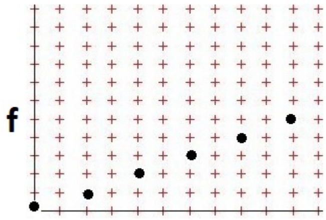
Per le funzioni naturali, come per tutte quelle numeriche, nel passaggio dalla formula all'elencazione bisogna tenere conto di un particolare: nella formula, il segno di moltiplicazione viene sovente sottinteso, ma bisogna metterlo quando si opera la sostituzione. Ad esempio, nella funzione naturale $f(n) = 2n$ bisogna sostituire come se fosse scritto $f(n) = 2 \cdot n$. Si ha pertanto (l'elencazione proseguirebbe all'infinito):

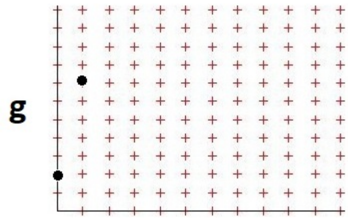
$f(0) = 2{\cdot}0 = 0$ $\quad f(1) = 2{\cdot}1 = 2$ $\quad f(2) = 2{\cdot}2 = 4$ $\quad f(3) = 2{\cdot}3 = 6$ $\quad f(4) = 2{\cdot}4 = 8$ $\quad$ .....

Un altro esempio: $\quad g(n) = 2n^2 + 3n + 2$

$g(0) = 2{\cdot}0^2{+}3{\cdot}0{+}2 = 0{+}0{+}2 = 2$ $\quad g(1) = 2{\cdot}1^2{+}3{\cdot}1{+}2 = 2{+}3{+}2 = 7$ $\quad g(2) = 2{\cdot}2^2{+}3{\cdot}2{+}2 = 8{+}6{+}2 = 16$ $\quad$ .....

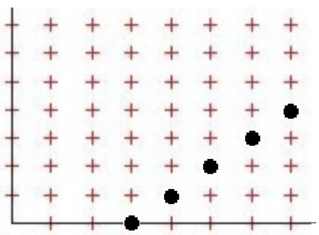
Dalla rappresentazione per elencazione si può poi passare a quella sul diagramma cartesiano: se ne può rappresentare soltanto una parte (in particolare nel secondo esempio si rappresentano solo due elementi, avendo dieci unità a disposizione), visto che prosegue all'infinito.

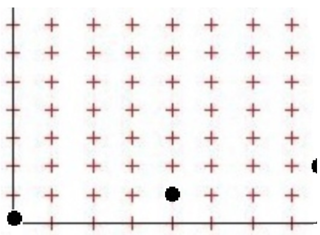


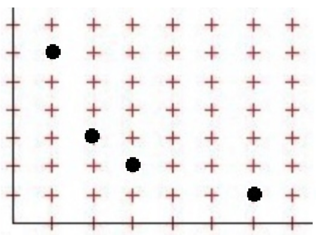


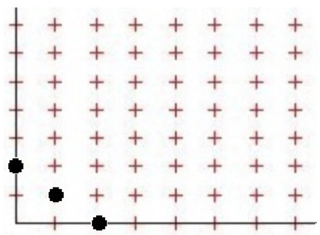
Il dominio è costituito dagli elementi per i quali tutte le operazioni possono essere svolte: operazioni che limitano il dominio sono la sottrazione (non si può da un numero sottrarne uno maggiore) e la divisione (il dividendo deve essere multiplo del divisore).
Ecco alcuni esempi di funzioni il cui dominio non è l'intero insieme $\mathbb{N}$, seguite dai rispettivi grafici (solo una parte per le prime due, completo per le altre due).

$f(n) =$	Dominio
$n - 3$	$\mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$
$n : 4$	multipli di 4
$6 : n$	$\{1, 2, 3, 6\}$
$2 - n$	$\{0, 1, 2\}$









Formule per funzioni intere

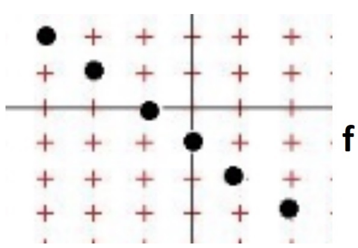
In questo paragrafo vengono soltanto accennate. Al contrario di quanto avviene nelle funzioni naturali, la sottrazione non crea alcun limite al loro dominio. Permangono invece le stesse limitazioni con la divisione. Ecco due esempi

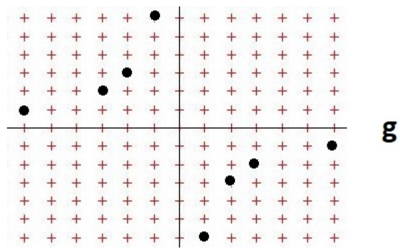
$$f(z) = -1 - z \qquad\qquad g(z) = 6 : z$$

nel primo il dominio è l'intero insieme $\mathbb{Z}$ (motivo per cui l'elencazione è preceduta e seguita da puntini che indicano che va all'infinito, sia prima che dopo), nel secondo il dominio è costituito dai divisori del dividendo 6, positivi o negativi che siano. Da notare che per i valori negativi, il numero che sostituisce va messo tra parentesi.

.... $f(-2) = -1-(-2) = -1+2 = 1$ $\quad f(-1) = -1-(-1) = -1+1 = 0$ $\quad f(0) = -1-0 = -1$ $\quad f(1) = -1-1 = -2$ $\quad f(2) = -1-2 = -3$ ....

$g(-6) = 6 : (-6) = -1$ $\; g(-3) = 6 : (-3) = -2$ $\; g(-2) = 6 : (-2) = -3$ $\; g(-1) = 6 : (-1) = -6$ $\; g(1) = 6 : 1 = 6$ $\; g(2) = 6 : 2 = 3$ $\; g(3) = 6 : 3 = 2$ $\; g(6) = 6 : 6 = 1$





Funzioni polinomiali naturali

Un particolare caso di funzione naturale è costituito dai polinomi a coefficienti interi. Il dominio dè costituito dagli elemeni una tale funzione P è costituito dai numeri naturali n tali che $P(n)$ non sia negativo: ma in questa sezione verranno presi in considerazione soltanto polinomi il cui dominio è l'intero insieme $\mathbb{N}$. tale $P(n)$, detta *valutazione del polinomio* si calcola come nel caso generale delle funzioni naturali.
Ecco un esempio, con un polinomio che viene valutato fino a $n = 3$. Per brevità, prodotti e potenze vengono risolti in un solo passaggio:

$$P(n) = 6n^2 - 7n + 2$$

$$P(0) = 6 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 + 2 = 0 - 0 + 2 = 2 \qquad P(1) = 6 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 2 = 6 - 7 + 2 = 1$$

$$P(2) = 6 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 2 = 24 - 14 + 2 = 12 \qquad P(3) = 6 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 2 = 54 - 21 + 2 = 35$$

Esistono delle scorciatoie per le valutazioni $P(0)$ e $P(1)$:

- $P(0)$ è il termine noto (ossia quello senza parte letterale) del polinomio. Se manca, tale termine vale 0.
- $P(1)$ è la somma dei coefficienti del polinomio. Quando la parte letterale di un monomio è senza coefficiente, esso vale 1 o, se preceduto da segno negativo, -1.

Applicando queste tecniche al precedente polinomio, si ottengono gli stessi risultati in maniera molto più semplice.
Ecco un altro esempio, sempre applicato fino a $n = 3$

$$Q(n) = n^3 - 2n^2 + n$$

$$Q(0) = 0 \qquad Q(1) = 1 - 2 + 1 = 0 \qquad Q(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 = 8 - 4 + 2 = 6 \qquad Q(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 = 27 - 18 + 3 = 12$$

Un ultimo esempio che viene poi rappresentato graficamente: avendo a disposizione solo 10 unità, si va avanti fino a quando la valutazione non supera il valore 10, poi si rappresentano sul grafico i valori trovati (eccetto l'ultimo, che uscirebbe dallo spazio disponibile).

$$R(n) = n^3 - 4n^2 + n + 6$$

$$R(0) = 6$$

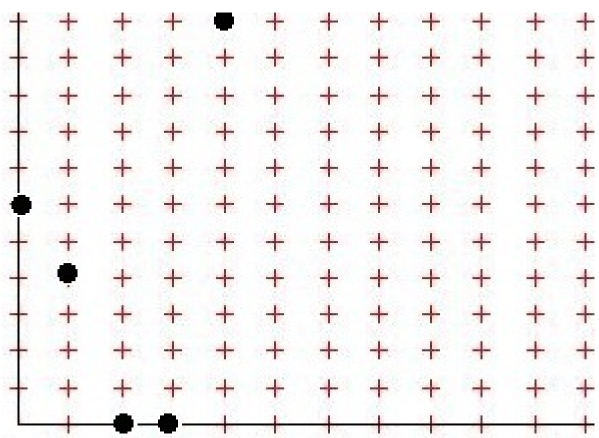
$$R(1) = 1 - 4 + 1 + 6 = 4$$

$$R(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6 = 8 - 16 + 2 + 6 = 0$$

$$R(3) = 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 3 + 6 = 27 - 36 + 3 + 6 = 0$$

$$R(4) = 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 4 + 6 = 64 - 64 + 4 + 6 = 10$$

$$R(5) = 5^3 - 4 \cdot 5^2 + 5 + 6 = 125 - 100 + 5 + 6 = 36$$



Funzioni polinomiali intere

Un polinomio a coefficienti interi è un particolare caso di funzione intera: il dominio è costituito dall'intero insieme $\mathbb{Z}$. Ecco un esempio: la valutazione del polinomio $P(z) = 2z^3 + z^2 - 3z - 1$ nell'intervallo $[-3, 3]$, ossia per i valori compresi fra -3 e 3. Risulta più comodo andare in ordine decrescente, ossia partire dal valore più alto.
Per i valori non negativi, si procede come nelle funzioni polinomiali naturali (comprese le scorciatoie per 0 e 1):

$P(3) = 2{\cdot}3^3{+}3^2{-}3{\cdot}3{-}1 = 54{+}9{-}9{-}1 = 53$ $\quad P(2) = 2{\cdot}2^3{+}2^2{-}3{\cdot}2{-}1 = 16{+}4{-}6{-}1 = 13$ $\quad P(1) = 2{+}1{-}3{-}1 = -1$ $\quad P(0) = -1$

Per i valori negativi, va ricordato di metterli tra parentesi:

$$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 1 = 2 \cdot (-1) + 1 - (-3) - 1 = -2 + 1 + 3 - 1 = 1$$

$$P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 1 = 2 \cdot (-8) + 4 - (-6) - 1 = -16 + 4 + 6 - 1 = -7$$

$$P(-3) = 2 \cdot (-3)^3 + (-3)^2 - 3 \cdot (-3) - 1 = 2 \cdot (-27) + 9 - (-9) - 1 = -54 + 9 + 9 - 1 = -27$$

Questi calcoli sono alquanto complicati, dovendo gestire prodotti e potenze con numeri negativi. Ma vi è un metodo meno complicato, basato sull'introduzione del polinomio ausiliario $P(-z)$. Si ricorda che, per un qualisiasi numero (non necessariamente intero) x e un naturale n si ha che:

- $(-x)^n = x^n$ se n è pari, in quanto il risultato è comunque positivo
- $(-x)^n = -x^n$ se n è dispari, in quanto il risultato mantiene il segno della base

Alla luce di questo, il polinomio $P(-z)$ si ottiene cambiando di segno i coefficienti dei monomi di grado dispari, lasciando inalterati quelli di grado pari. Da notare anche che

- Un monomio senza esponente ha grado 1, pertanto va cambiato di segno
- Il termine nota ha grado 0, pertanto non cambia.

Pertanto, in questo caso:

$$P(-z) = -2z^3 + z^2 + 3z - 1$$

A questo punto si sostituiscono in esso i valori assoluti che interessano: ossia, per trovare $P(-3)$ e $P(-2)$ si può usare $P(-z)$ sostituendo z rispettivamente con 3 e con 2, senza preoccuparsi dei segni. Anche per $P(-1)$ si procede nello stesso modo e, analogamente a $P(1)$ si può utilizzare la scorciatoia e sommare i coefficienti del polinomio $P(-z)$.

$P(-3) = -2{\cdot}3^3{+}3^2{+}3{\cdot}3{-}1 = -54{+}9{+}9{-}1 = -37$ $\quad P(-2) = -2{\cdot}2^3{+}2^2{+}3{\cdot}2{-}1 = -16{+}4{+}6{-}1 = -7$ $\quad P(-1) = -2{+}1{+}3{-}1 = 1$

Si sono ottenuti gli stessi risultati. Va anche notato, confrontando le valutazioni per valori opposti (ad esempio $P(3)$ e $P(-3)$) che, la somma algebrica che si ottiene prima dell'ultimo passaggio è formata da numeri uguali in valore assoluto (ma i segni sono ovviamente diversi).
Ecco un altro esempio, comprensivo di rappresentazione su diagramma cartesiano, con un polinomio e l'intervallo sul quale rappresentarlo: l'opzione migliore è di procedere in maniera decrescente, valutando il polinomio prima per i numeri negativi, poi per lo zero, poi si scrive il polinomio ausiliario, infine (usando quest'ultimo) si valuta per i numeri negativi.

$Q(x) = -x^3 + 2x^2 + 2x - 2 \qquad [-2, 3]$

$$Q(3) = -3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 2 = -27 + 18 + 6 - 2 = -5$$

$$Q(2) = -2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 2 = -8 + 8 + 4 - 2 = 2$$

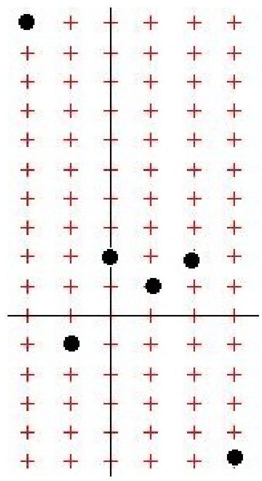
$$Q(1) = -1 + 2 + 2 - 2 = 1$$

$$Q(0) = 2$$

$$\mathbf{Q(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 2}$$

$$Q(-1) = 1 + 2 - 2 - 2 = -1$$

$$Q(-2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 2 = 8 + 8 - 4 - 2 = 10$$



Funzioni razionali

Una funzione razionale è un rapporto tra due polinomi: benché non sia necessario che i polinomi abbiano i coefficienti interi, in questa sezione si tratteranno solo funzioni di questo tipo. La valutazione di una tale funzione avviene valutando separatamente i due polinomi: solo alla fine bisogna scrivere una frazione semplificata e con eventuale segno negativo davanti ad essa (non in corrispondenza del numeratore o del denominatore). Da notare che, in generale, una funzione razionale non è intera perché il risultato della valutazione sarà, in generale, una frazione (sebbene in certi casi può essere semplificata a numero intero), sempre chetale rapporto sia definito (non lo è se il denominatore è nullo). Ecco come si semplifica nel segno una frazione nella forma N/D:

- Se uno solo dei due termini è negativo, il segno complessivo è negativo, se sono entrambi (o nessuno) negativi il segno complessivo è positivo (e si sconsiglia di mettere davanti un inutile segno positivo)
- Se il denominatore è 0, il risultato non è definito (abbreviato come $n.d.$), anche se il numeratore è 0
- Se il numeratore è 0, il risultato è 0, a meno che il denominatore non sia 0 anch'esso.

Le regole degli zeri dicono che la regola $N/0 = n.d.$ prevale sulla regola $0/N = 0$, pertanto $0/0 = n.d.$ Ecco un esempio: da notare che, per i numeri negativi, basta considerare che

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \longrightarrow \qquad f(-x) = \frac{P(-x)}{Q(-x)}$$

I dati iniziali sono la funzione e l'intervallo in cui calcolarla:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{-x^2 + 1} \qquad [-3, 3]$$

Questa la risoluzione: l'ordine è indifferente

$$f(3) = \frac{-3^2 + 3 \cdot 3 - 2}{-3^2 + 1} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4} \qquad f(2) = \frac{-2^2 + 3 \cdot 2 - 2}{-2^2 + 1} = \frac{0}{-3} = 0 \qquad f(1) = \frac{-1 + 3 - 2}{-1 + 1} = \frac{0}{0} n.d.$$

$$f(0) = \frac{-2}{1} = -2 \qquad \mathbf{f(-x) = \frac{-x^2 - 3x - 2}{-x^2 + 1}}$$

$$f(-3) = \frac{-3^2 - 3 \cdot 3 - 2}{-3^2 + 1} = \frac{-20}{-8} = \frac{5}{2} \qquad f(-2) = \frac{-2^2 - 3 \cdot 2 - 2}{-2^2 + 1} = \frac{-12}{-3} = 4 \qquad f(-1) = \frac{-1 - 3 - 2}{-1 + 1} = \frac{-6}{0} n.d.$$