Trinomi monici di secondo grado

Dati due numeri s e p (per il momento senza segno), un trinomio nella forma

$$x^2 + sx + p$$

si scompone trovando due numeri T_1 e T_2 la cui somma è s e il cui prodotto è p, e scrivendolo come il prodotto di due binomi monici di primo grado

$$(x + T_1)(x + T_2)$$

Ecco alcuni esempi: non ha alcuna importanza in quale ordine vengono messi

$x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)$ $\quad$ $x^2+8x+12 = (x+2)(x+6)$ $\quad$ $x^2+8x+15 = (x+3)(x+5)$ $\quad$ $x^2+9x+18 = (x+6)(x+3)$

Il modo migliore per trovarli è partire dal prodotto, dove le possibilità sono limitate (magari una sola), e verificare se qualcuna di queste coppie ha come somma quella cercata. Da notare che, se i due numeri s e p non sono consecutivi (solo nel primo dei precedenti esempi lo sono), il banale prodotto $p \cdot 1$ può essere scartato a priori. Ecco quindi quali sono, negli esempi precedenti, le coppie avente prodotto p. Viene poi trovata la somma di ognuna delle coppie (in grassetto quella in cui la somma corrisponde al numero cercato s)

$3 \cdot 2$	$1 \cdot 6$	$3 \cdot 4$	$2 \cdot 6$	$5 \cdot 3$	$3 \cdot 6$	$2 \cdot 9$
$\mathbf{3 + 2 = 5}$	$1 + 6 = 7$	$3 + 4 = 7$	$\mathbf{2 + 6 = 8}$	$\mathbf{5 + 3 = 8}$	$\mathbf{3 + 6 = 9}$	$2 + 9 = 11$

Se il prodotto è positivo, ma la somma è negativa, si procede nello stesso modo, ma i due termini sono negativi. Ecco come diventano gli esempi precedenti

$x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$ $\quad$ $x^2-8x+12 = (x+2)(x+6)$ $\quad$ $x^2-8x+15 = (x-3)(x-5)$ $\quad$ $x^2-9x+18 = (x-6)(x-3)$

Un caso particolare si ha quando la coppia è formata da due numeri uguali: in questo caso il binomio non si scrive due volte, ma lo si eleva al quadrato

$$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2 \qquad x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

Se invece il prodotto è negativo, allora i due numeri da trovare sono tra loro discordi (uno positivo e uno negativo) e il segno della somma corrisponde a quello, dei due termini, maggiore in valore assoluto, e la differenza dei due valori assoluti sarà quella che determina la somma cercata. Ecco alcuni esempi, comprensivi di ricerca della coppia di numeri giusta (ancora una volta, il prodotto banale va scartato se i valori assoluti dei due numeri di partenza non sono consecutivi).

$x^2 - 5x - 6$		$x^2 - 7x - 18$		$x^2 + x - 12$		$x^2 + 2x - 8$
$3 \cdot 2$ $3 - 2 = 1$	$6 \cdot 1$ $\mathbf{6 - 1 = 5}$	$6 \cdot 3$ $6 - 3 = 3$	$9 \cdot 2$ $\mathbf{9 - 2 = 7}$	$6 \cdot 2$ $6 - 2 = 4$	$4 \cdot 3$ $\mathbf{4 - 3 = 1}$	$4 \cdot 2$ $\mathbf{4 - 2 = 2}$
$(x - 6)(x + 1)$		$(x - 6)(x + 3)$		$(x + 4)(x - 3)$		$(x + 4)(x - 2)$

Da notare che nei primi due esempi, con somma negativa, il numero maggiore (in valore assoluto) dei due da trovare è negativo e il minore è positivo, negli ultimi due, con somma positiva, accade il contrario. Riassumendo:

- Se il prodotto è positivo, entrambi i numeri da trovare hanno il segno della somma
- Se il prodotto è negativo, solo il maggiore (in valore assoluto) dei numeri da trovare ha il segno della somma (corrispondente, in valore assoluto, alla differenza tra i due numeri da trovare).

Ecco ora tre esempi in cui il trinomio va prima ordinato e/o bisogna svolegere un raccoglimento:

$$-3x^3 - 12x - 12x^2 = -3x^3 - 12x^2 - 12x = -(3x^3 + 12x^2 + 12x) = -3x(x^2 + 4x + 4) = -3x(x + 2)^2$$

$$-10x^2 - 3x^3 + x^4 = x^4 - 3x^3 - 10x^2 = x^2(x^2 - 3x - 10) = x^2(x + 2)(x - 5)$$

$$-4x^2 + 16x - 12 = -(4x^2 - 16x + 12) = -4(x^2 - 4x + 3) = -4(x - 1)(x - 3)$$

Generalizzazione

Questa regola di scomposizione può essere generalizzata a trinomi in cui il grado massimo sia il doppio di quello intermedio: i due fattori, anziché essere binomi di primo grado, sono binomi il cui grado e la metà di quello originale (ossia il grado del monomio intermedio):

$$x^6 - 5x^3 - 14 = (x^3 - 7)(x^3 + 2) \qquad x^{10} - 8x^5 + 7 = (x^5 - 1)(x^5 - 7)$$

In maniera simile a quanto visto per i binomi, un trinomio di grado 4 si scompone in due binomi di grado 2, ognuno dei quali può essere scomponibile: ma, mentre nel caso dei binomi, uno dei due fattori è scomponibile (quello con termine noto negativo) e l'altro no (quello con termine noto positivo) e va trascritto, nel caso dei trinomi può anche succedere che nessuno dei due sia scomponibile (in tal caso non si va avanti) o che entrambi lo siano.

$$x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 4)(x^2 + 1) \qquad x^4 - 10x^2 + 9 = (x^2 - 9)(x^2 - 1) = (x + 3)(x - 3)(x + 1)(x - 1)$$

$$x^4 + 5x^2 - 36 = (x^2 + 9)(x^2 - 4) = (x^2 + 9)(x + 2)(x - 2) \qquad x^4 - 24x^2 - 25 = (x^2 - 25)(x^2 + 1) = (x + 5)(x - 5)(x^2 + 1)$$

Nel caso in cui la scomposizione dia, anziché due binomi, un solo binomio elevato al quadrato, se il suo termine noto è negativo la scomposizione è finita, altrimenti questo binomio viene scomposto riportando il quadrato su entrambi i fattori:

$$x^4 + 18x^2 + 81 = (x^2 + 9)^2 \qquad x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4)^2 = (x - 2)^2(x + 2)^2$$

Nel caso di un trinomio di grado 8 (e così via raddoppiando), esso si scompone in due binomi di grado 4 (ancora una volta questo deve essere anche il grado del monomio intermedio), e se uno o entrambi hanno termine noto negativo, si procede con la scomposizione

$$x^8 - 15x^4 - 16 = (x^4 - 16)(x^4 + 1) = (x^2 - 4)(x^2 + 4)(x^4 + 1) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)(x^4 + 1)$$

Ecco ora tre esempi in cui il trinomio va prima ordinato e/o bisogna svolegere un raccoglimento:

$$-40x^5 - 36x^3 - 4x^7 = -4x^7 - 40x^5 - 36x^3 = -(4x^7 + 40x^5 + 36x^3) = -4x^3(x^4 + 10x^2 + 9) = -4x^3(x^2 + 1)(x^2 + 9)$$

$$-36x - 5x^3 + x^5 = x^5 - 5x^3 - 36x = x(x^4 - 5x^2 - 36) = x(x^2 + 4)(x^2 - 9) = x(x^2 + 4)(x + 3)(x - 3)$$

$$-5x^4 + 25x^2 - 20 = -(5x^4 - 25x^2 + 20) = -5(x^4 - 5x^2 + 4) = -5(x^2 - 4)(x^2 - 1) = -5(x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 1)$$