Intervalli

Un intervallo è un sottoinsieme dei numeri reali privo di interruzioni: escludendo il caso dell'intervallo corrispondente all'intero insieme $\mathbb{R}$, esso deve essere limitato a destra e/o a sinistra. Rappresentando l'insieme $\mathbb{R}$ con una retta orizzontale, un intervallo limitato da entrambe le parti è un segmento, quelli a cui manca un estremo si rappresentano con una semiretta. Da notare che, dati due numeri reali, essi dividono la retta in un intervallo limitato (al centro) e due intervalli illimitati. Nell'esempio raffigurato qui sotto la retta viene divisa dai valori -3 e 0: si ottengono, guardando da sinistra verso destra. Ognuno degli estremi di un intervallo illimitati possono appartenere o no all'intervallo: ovvero possono partire dall'estremo sinistro oppure subito dopo, e possono arrivare all'estremo destro o fermarsi subito prima.

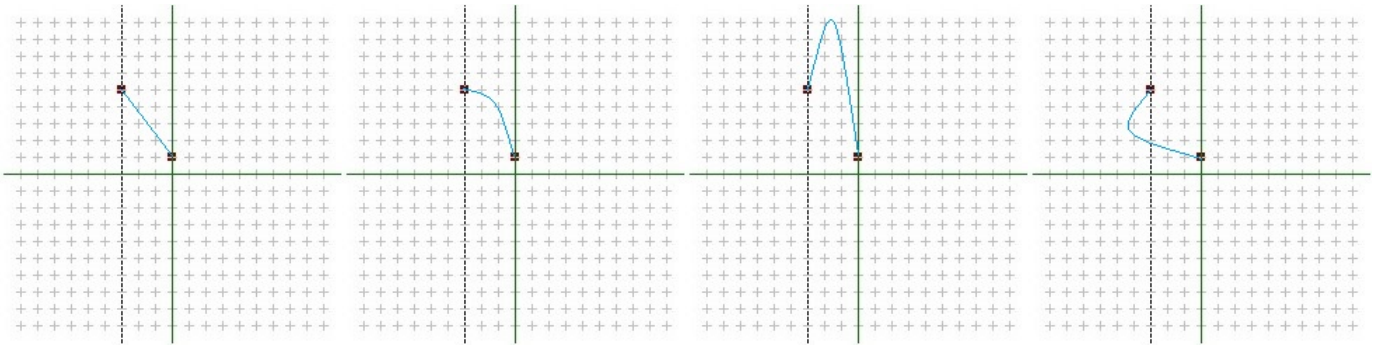
- Un intervallo illimitato a sinistra e limitato a destra dal valore -3.
- Un intervallo limitato compreso tra -3 e 0.
- Un intervallo illimitato a desta e limitato a sinistra dal valore 0.

Per gli intervalli illimitati si usa la notazione ∞ ovvero "infinito", che sta ad indicare l'assenza di limitazione: quando l'intervallo è illimitato a sinistra si dice che l'estremo sinistro è $-\infty$, quando è illimitato a destra l'estremo destro è $+\infty$. nell'esempio precedente, la semiretta a sinistra è compresa tra $-\infty$ e -3, quella a destra tra 0 e $+\infty$. Anche qui l'estremo presente può appartenere o no all'intervallo, mentre ∞ non vi appartiene mai. Altra importante particolarità di ∞ è che va sempre specificato il segno, che altrimenti rimane indefinito: non è invece così per i numeri, dove l'assenza di segno ne sottointende uno positivo (ad esempio non c'è alcuna differenza fra 2 e $+2$)

Funzioni continue in intervalli limitati

Il grafico di funzione avente come dominio un intervallo limitato di estremi a e b è compresa all'interno della striscia verticale delimitata dalle rette $x = a$ e $x = b$.
Definendo $f(a)$ e $f(b)$ il grafico di una simile funzione continua sarà un collegamento fra il punto $(a, f(a)$ e il punto $(b, f(b)$: il collegamento più comodo sarà quello rettilineo, ma nulla vieta di tracciare una qualsiasi linea continua che li colleghi, purché non torni mai indietro (altrimenti non sarebbe una funzione), mentre sono ammissibili i saliscendi.
Ecco tre esempi di rappresentazione di una funzione continua così definita, seguiti da un quarto esempio, che però è sbagliato, in quanto il grafico ritorna indietro.

$$f(-3) = 5 \qquad\qquad f(0) = 1$$



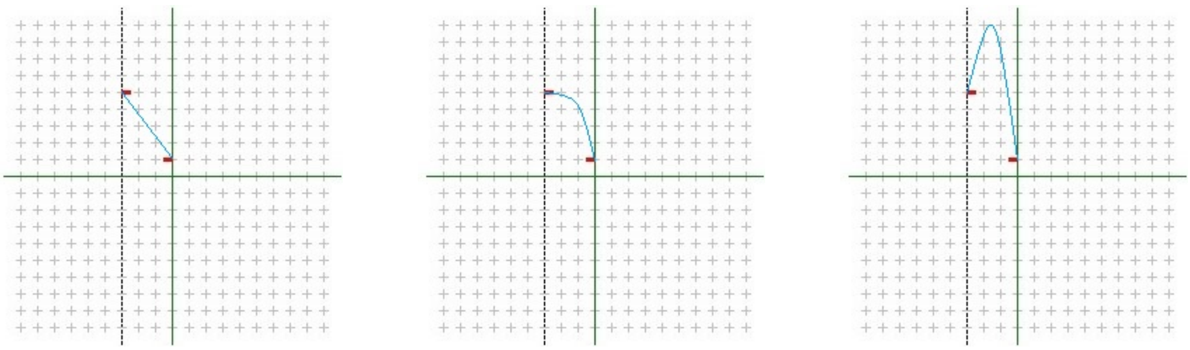
Se manca uno o entrambi gli estremi, non può essere definito $f(c)$ per il valore di quell'estremo, in quanto tale c non fa parte del dominio.
Questo viene supplito con la definizione di limite. La scritta sottostante significa approssimativamente “per valori vicini a c la funzione assume valori vicini a d" (la definizione rigorosa è più complicata).

$$\lim_{x \to c} f(x) = d$$

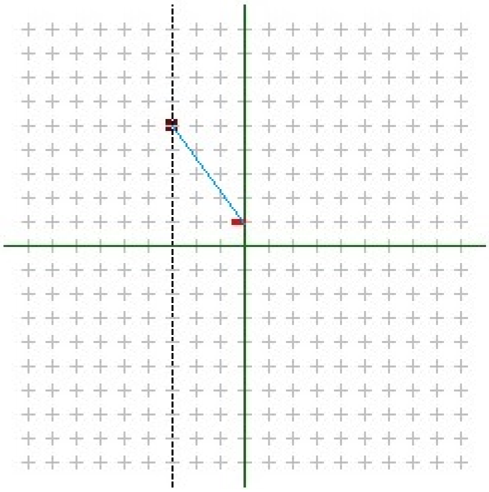
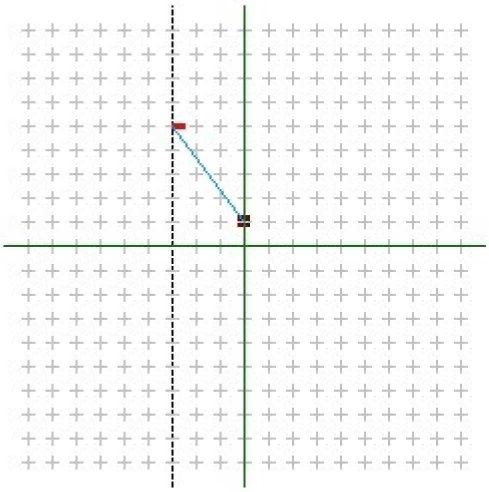
Ecco un esempio: è quasi uguale a quello precedente, ma mancano gli estremi del dominio e, per ciascuno di essi, la scritta $f(c) = d$ è stata sostituita da $\lim_{x \to c} f(x) = d$.

$$\lim_{x \to -3} f(x) = 5 \qquad\qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Qui sotto i possibili grafici di questa funzione: sono identici alla precedente, l'unica differenza sta nel fatto che gli estremi vengono esclusi, pertanto i “puntoni” del grafico precedente (indicanti l'appartenenza al grafico) sono stati sostituiti da beccucci rivolti verso l'interno (non indispensabili, ma si vedrà in seguito la loro utilità).



Si contempla anche il caso in cui uno solo dei due estremi sia presente. In questo caso in corrispondenza di un estremo viene specificato il valore della funzione, dell'altro si specifica il limite: e nel grafico apparirà un puntone e un beccuccio. Si rappresentano due esempi, ancora una volta analoghi ai precedenti, in cui viene tolto prima un estremo e poi l'altro: per brevità viene mostrato solo il grafico rettilineo, ma ancora una volta non è strettamente indispensabile che lo sia.

$\lim_{x \to -3} f(x) = 5$ $f(0) = 1$	
$f(-3) = 5$ $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$	

Senza tratti orizzontali

Si supponga di dover rappresentare una funzione continua (la presenza o assenza degli estremi cambia molto di poco il grafico) tale che:

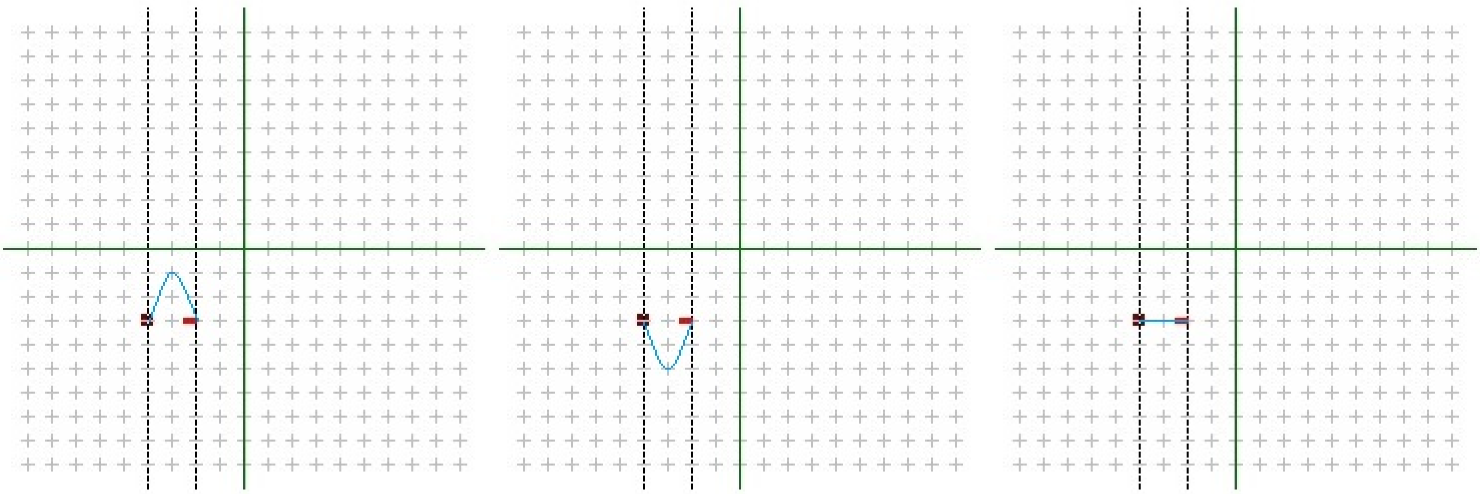
$$\lim_{x\to 1} f(x) = -2 \qquad\qquad f(4) = -1$$

Una possibile rappresentazione è la seguente.

Tuttavia sarebbe errata se venisse richiesto di rappresentarla "senza tratti orizzontali". Se in questo caso un grafico rettilineo rispetterebbe la condizione, la situazione si complica quando i valori agli estremi (il valore $f(x)$ quando è compreso, il limite quando è escluso) sono uguali, perchè un collegamento rettilineo sarebbe orizzontale. Tuttavia il problema è facilmente risolvibile facendola passare in alto o in basso.
Si supponga ad esempio di dover rappresentare la funzione continua senza tratti orizzontali

$$f(-4) = -3 \qquad\qquad \lim_{x\to -2} f(x) = -3$$

Due possibili soluzioni (fra le più semplici, potrebbero avere anche tanti saliscendi) sono quelle a sinistra, mentre quella a destra è errata, in quanto non verifica la condizione "senza tratti orizzontali".

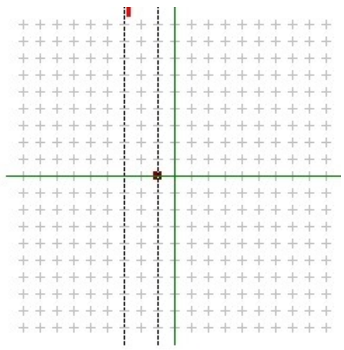
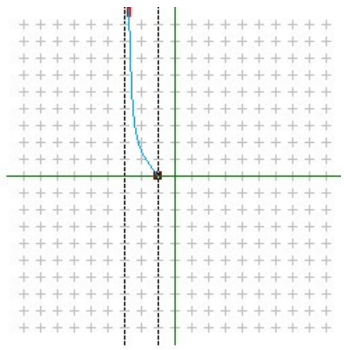
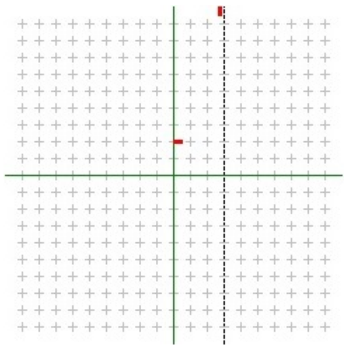
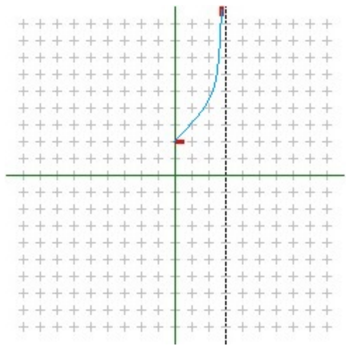
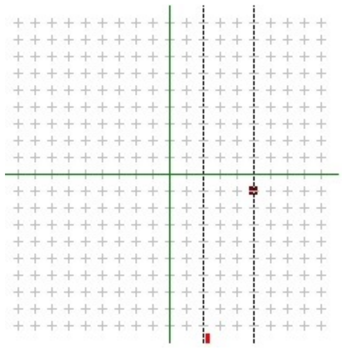
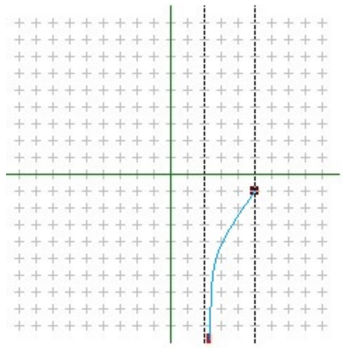
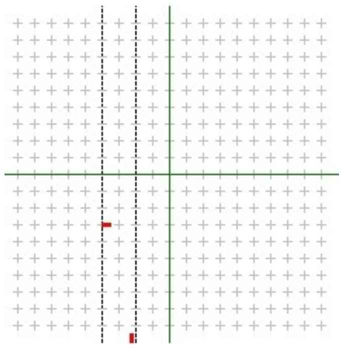
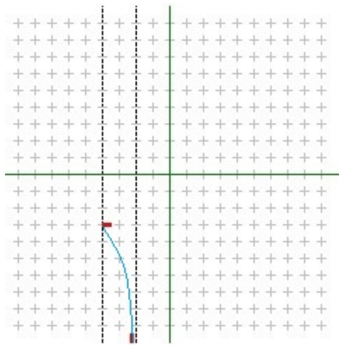


Asintoti verticali

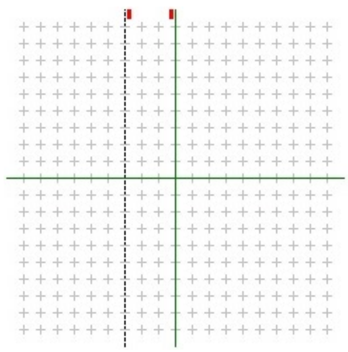
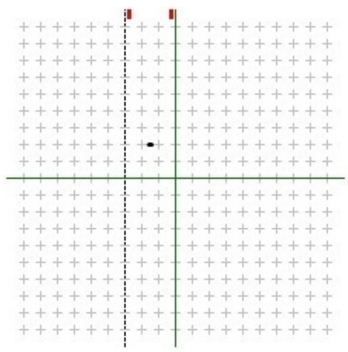
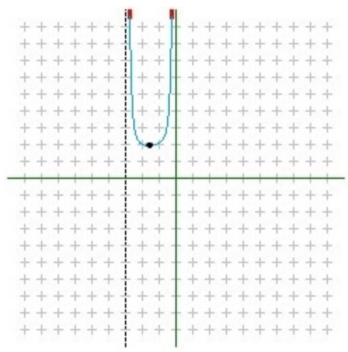
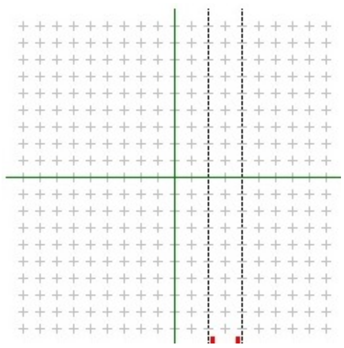
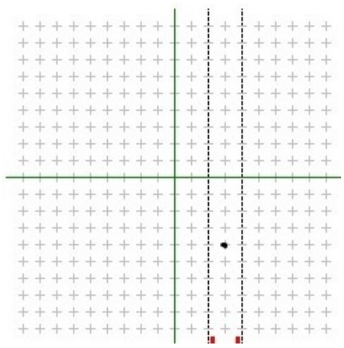
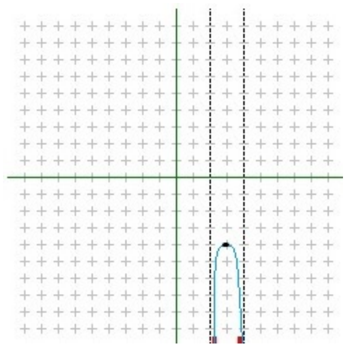
Si è visto che in corrispondenza di un estremo mancante, si definisce per tale valore il limite. Se tale limita vale L significa che nei dintorni dell'estremo la funzione assume valori "vicino a L". Questo L può essere anche infinito, e per "vicino a infinito" si intende valori molto grandi (positivi o negativi a secondo del segno). Iil grafico, avvicinandosi a tale estremo, schizza in alto (se il limite è $+\infty$) o in basso (quando è $-\infty$): la retta verticale che delimita la striscia è un asintoto, ossia una retta acui il grafico della funzione si avvicina senza mai toccarla, raggiungendo valori sempre più alti (o più bassi) man mano che si avvicina, diventando sempre più verticale (ma mai veramente verticale): proprio per questo, il collegamento non può essere rettilineo.

In fase di costruzione è utile mettere in corrispondenza dell'asintoto una lineetta verticale, unitamente al puntone (se l'estremo è compreso) o al trattino (se non lo è): ancora una volta nulla cambia per quanto riguarda l'aspetto del grafico. Da notare che in ognuno dei due estremi si segna un puntone (se l'estremo è compreso), un lineetta orizzontale verso l'interno (se l'estremo non è compreso e il limite è finito) o una lineetta verticale accanto all'asintoto in alto o in basso (se il limite è infinito): il collegamento non deve necessariamente sovrapporsi con le lineette, esse servono solo a dare l'idea di come collegare i due estremi.

Ecco alcuni esempi, per ognuno dei quali vengono rappresentate due fasi: nella prima si segna cosa succede agli estremi, nella seconda si rappresenta il collegamento. Conviene tracciare il collegamento partendo dal punto finito (trattino o puntone che sia) verso la lineetta verticale, avvicinandosi all'asintoto senza toccarlo: pertanto nel primo e nell'ultimo dei quattro esempi che seguono, la linea va tracciata da destra verso sinistra, nel secondo e nel terzo da sinistra verso destra. In altre parole, la linea tende a verticalizzarsi, senza mai diventare del tutto verticale.

$f(-1) = 0$ $\lim_{x \to -3} f(x) = +\infty$		
$\lim_{x \to 0} f(x) = 2$ $\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty$		
$\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$ $f(4) = -1$		
$\lim_{x \to -4} f(x) = -3$ $\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$		

Può vericarsi il caso in cui entrambi i limiti sono infiniti, in ogni caso con lo stesso segno (non viene preso in considerazione il caso in cui abbiano segno diverso). Se nel caso in cui c'è un solo asintoto conviene tracciare la linea dal punto (puntone o trattino) verso di esso, nel caso di due asintoti conviene segnare un punto a mezza altezza e poi collegarlo con i due asintoti: ecco pertanto la rappresentazione, questa volta in tre passaggi (la quota del punto aggiunto è arbitraria): si consiglia di fare in modo che il grafico sia tondeggiante in corrispondenza del punto aggiunto.

$\lim_{x\to -3} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$			
$\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to 4} f(x) = -\infty$			

Riassumendo, ecco il modo migliore di effettuare il collegamento:

- Il collegamento tra due punti (ognuno dei quali può essere un puntone o un trattino) il collegamento è rettilineo, a meno che i punti non siano alla stessa quota.
- Il collegamento tra due punti alla stessa quota si effettua tramite una linea che sale e poi scende oppure viceversa (la scelta è indifferente)
- Se a sinistra (destra) c'è un punto (puntone o trattino) e a destra (sinistra) un asintoto, si parte dal punto e si traccia una linea verso destra (sinistra) che schizza verso l'alto o il basso (a secondo del segno dell'infinito) avvicinandosi sempre più all'asintoto (ma senza toccarlo)
- Il collegamento tra due asintoti verticali si effettua inserendo un punto fra i due asintoti a mezza altezza, e collegando tale punto con ognuno dei due asintoti.

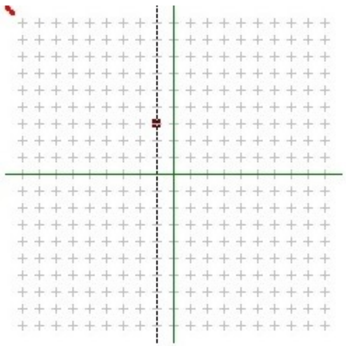
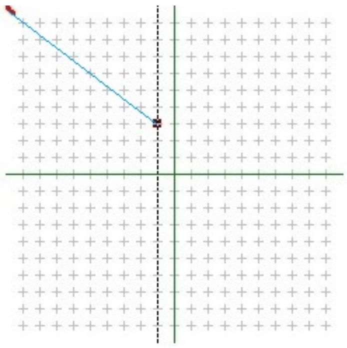
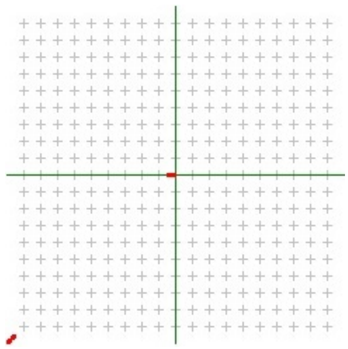
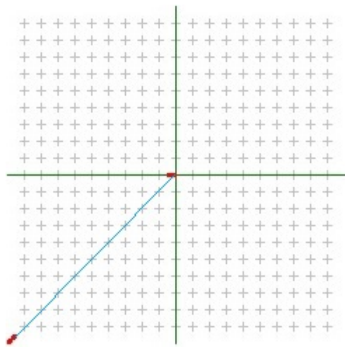
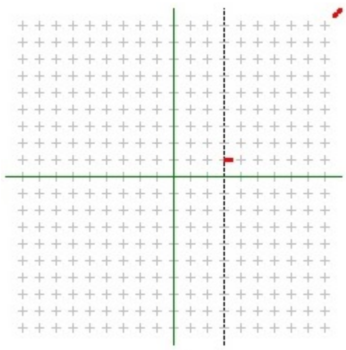
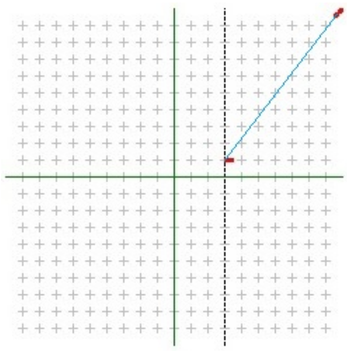
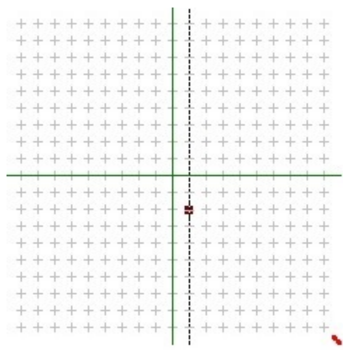
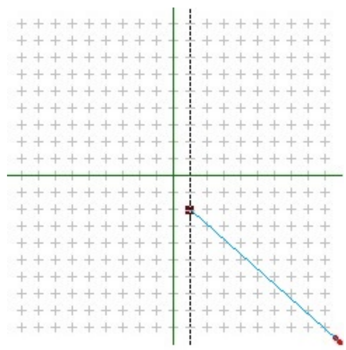
Funzioni continue in intervalli illimitati

Si è visto precedentemente che, se un estremo c dell'intervallo (o anche entrambi) non è incluso, si definisce $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, che definisce cosa succede "per valori vicini a c". Nel caso di intervalli illimitati, uno dei due estremi è infinito, e per analogia si definisce $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Il segno di infinito è positivo o negativo a secondo che l'intervallo sia illimitato rispettivamente a destra o a sinistra, e significa cosa succede "per valori vicini a infinito", ossia "per valori molto grandi", cioè all'estremità destra o sinistra.
In questo paragrafo si suppone che il valore limite sia anch'esso infinito. In questo caso il grafico finisce in un angolo, determinato dal suo segno. Si ha pertanto:

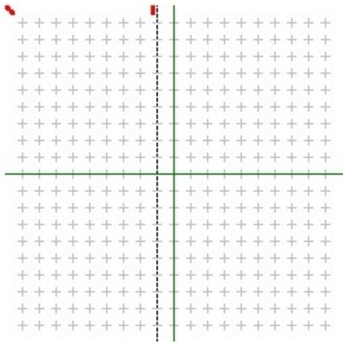
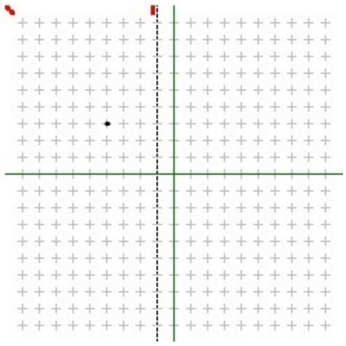
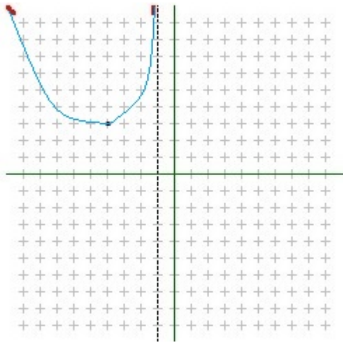
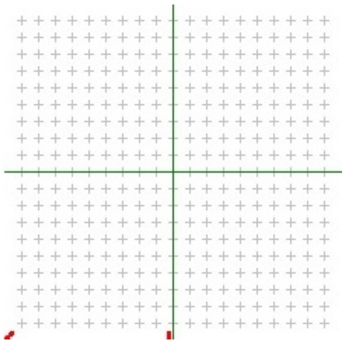
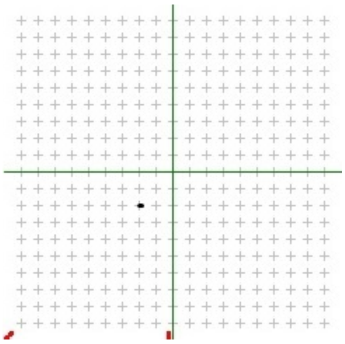
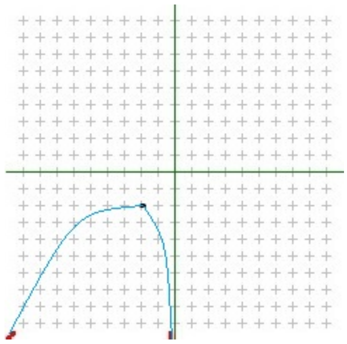
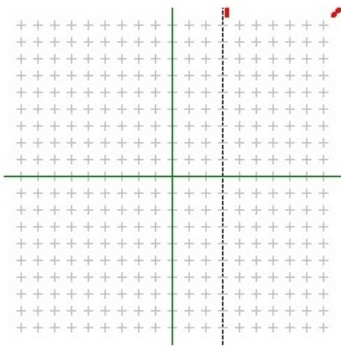
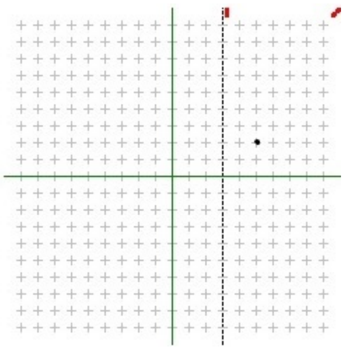
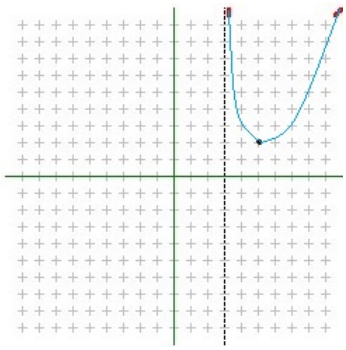
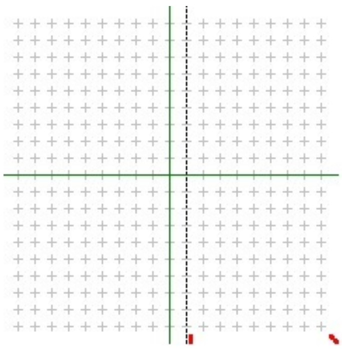
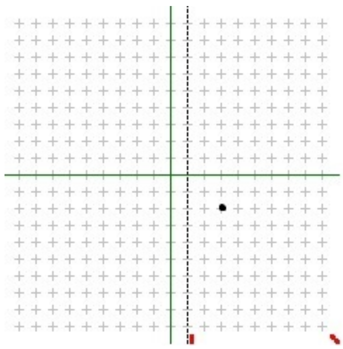
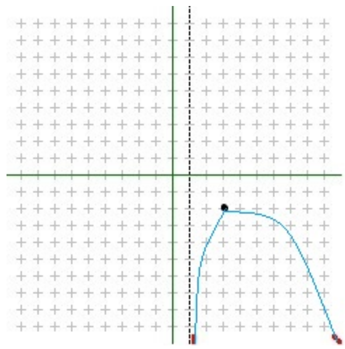
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	angolo in alto a destra
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	angolo in basso a destra
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	angolo in alto a sinistra
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	angolo in basso a sinistra

Se l'altro estremo è compreso nell'intervallo, oppure se il limite è finito, il collegamento può anche essere rettilineo. Se invece anche l'altro estremo ha limite infinito, allora il collegamento non può essere rettilineo, in quanto c'è un asintoto verticale: se i limiti (entrambi infiniti) sono positivi il grafico scende e poi risale, se sono negativi il grafico sale e poi riscende.

In questi esempi, in cui un punto (puntone o trattino, nessuna differenza) viene collegato ad un angolo con andamento rettilineo

$f(1) = 2$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$		
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $f(-1) = 3$		
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$		
$\lim_{x\to 3} f(x) = -1$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$		

In questi esempi, un asintoto verticale viene collegato ad un angolo: come già fatto in precedenza, si pone un punto a mezza altezza per essere collegato alle due entità (il collegamento con l'angolo può anche essere rettilineo, anche se si preferisce sia arrotondato)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$			
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$			
$\lim\limits_{x\to3} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$			
$\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$			

Asintoti orizzontali

Nel paragrafo precedente, è stato mostrata la situazione in cui il limite all'infinito sia infinito (con il corrispondente grafico che finiva in un angolo). Resta da considerare la situazione in cui tale limite sia finito, ovvero il caso in cui, per un valore L finito, si ha

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

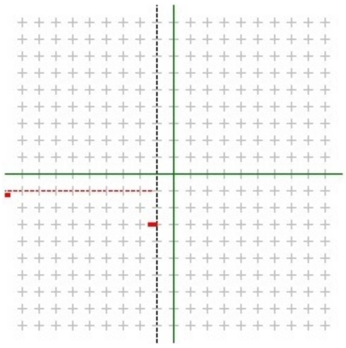
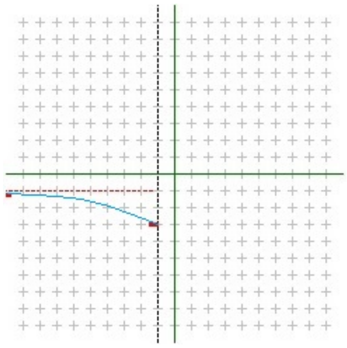
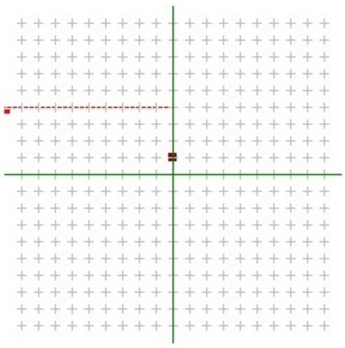
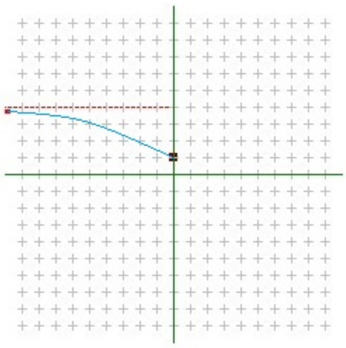
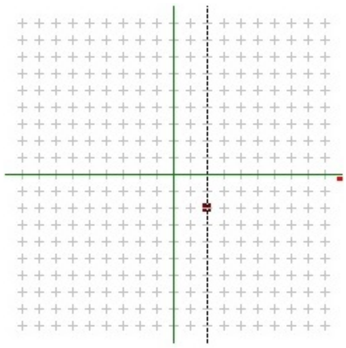
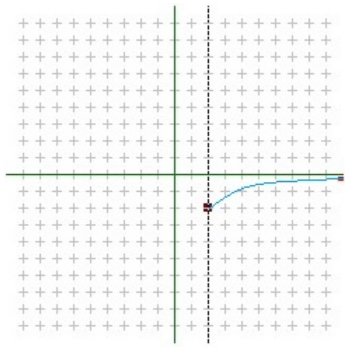
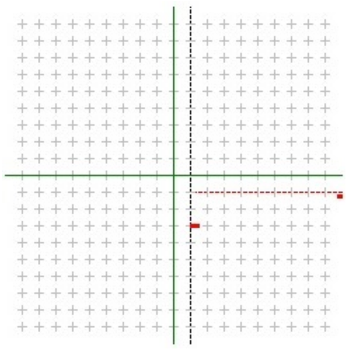
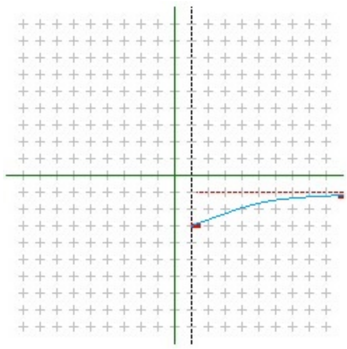
In realtà non si troverà semplicemente ∞ bensì $-\infty$ (estrema sinistra del piano) o $+\infty$ (estrema destra). L'espressione significa che per valori vicini a ∞, (cioè molto grandi, quindi all'estremità destra o sinistra del piano), la funzione assumerà volor vicini a L. Ecco allora come si costruisce il grafico di una simile funzione. Si suppone che l'altro estremo (che verrà chiamato a) sia incluso e che sia $f(a) = b$. Questi sono i passaggi da effettuare:

1. Si traccia la linea verticale $x = a$ che delimita la striscia.
2. Si segna su tale linea il punto ad altezza b
3. Si traccia a sinistra o a destra (dipende dal segno di ∞) di tale linea una semiretta orizzontale ad altezza c.

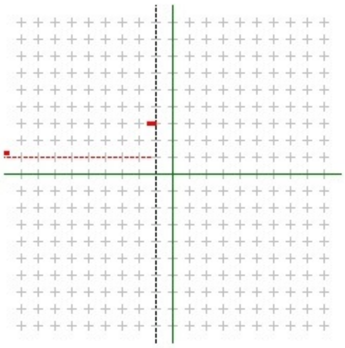
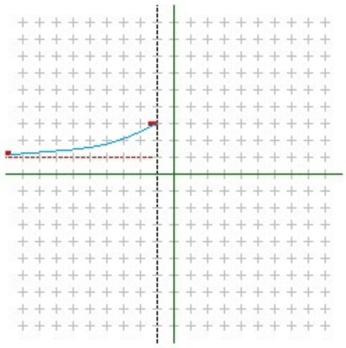
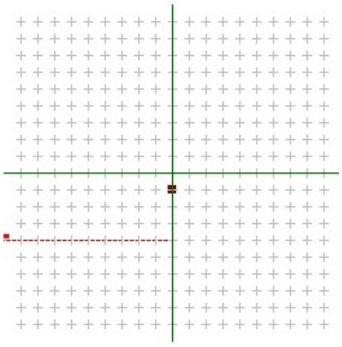
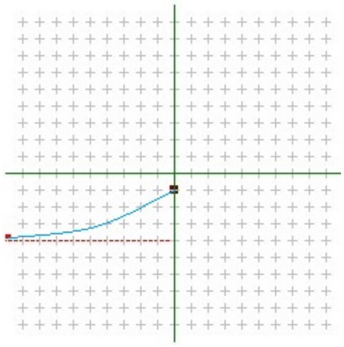
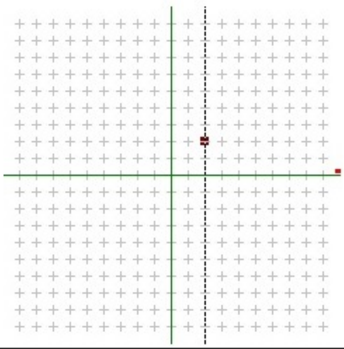
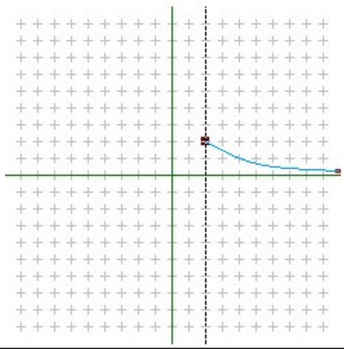
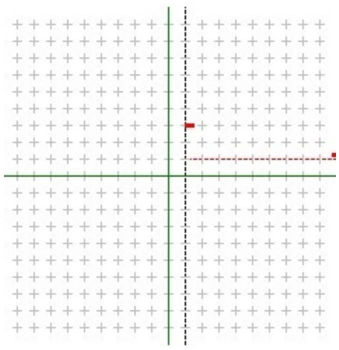
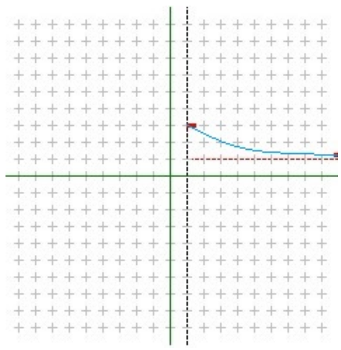
A questo punto, il grafico potrebbe da un certo punto in poi coincidere con tale semiretta, che si chiama *asintoto orizzontale*. Ma, ancora una volta, verrà posta la condizione "senza tratti orizzontali" che esclude la possibilità appena citata. Il grafico si avvicina sempre di più all'asintoto senza mai toccarlo. Si avvicina dall'alto o dal basso? Indifferente, ma per rendere il grafico quanto più semplice possibile, è meglio sia dalla parte del valore b, quindi dall'alto se $b > c$, dal basso se $c < b$. Verrà trattato a parte il caso in cui $c = b$. Nulla cambia se, anziché $f(a) = b$ ci sia $\lim_{x \to a} f(x) = b$, a parte il fatto di avere un trattino anziché un puntone. In fase di costruzione, è utile mettere all'estremità sinistra o destra del piano, tracciare una lineetta orizzontale dove dovrà passare il grafico (immediatamente sopra o sotto l'asintoto). Pertanto il grafico si completa in questa maniera.

4. Si traccia una lineetta orizzontale in corrispondenza dell'asintoto
5. Si collega il punto con la lineetta

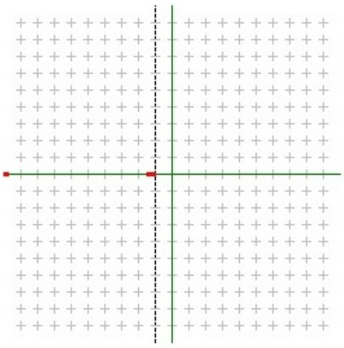
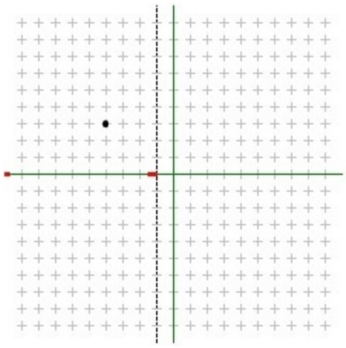
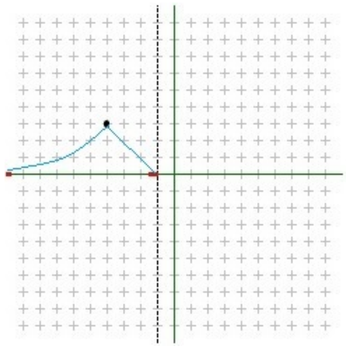
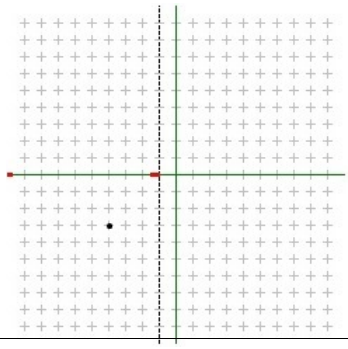
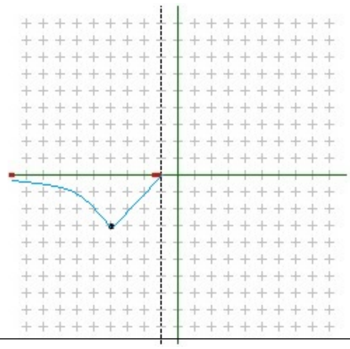
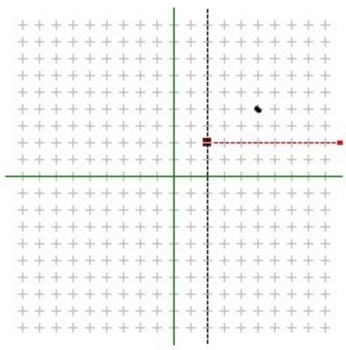
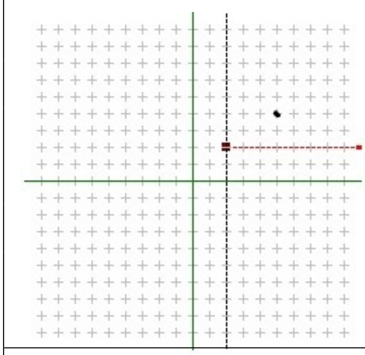
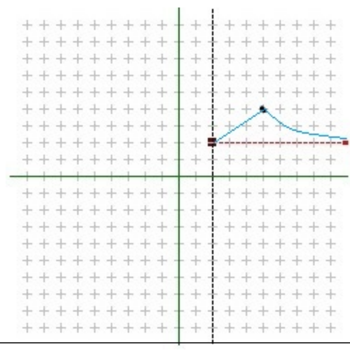
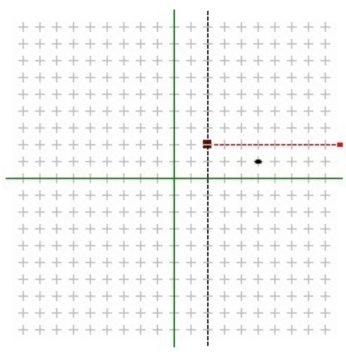
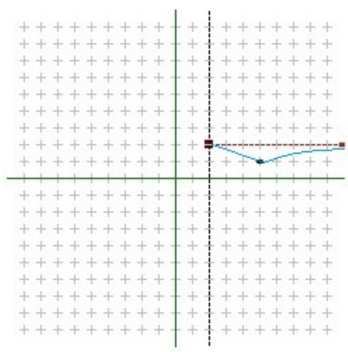
In questi esempi, si collega un punto (puntone o trattino) ad un asintoto orizzontale: la lineetta verticale si mette sotto l'asintoto, in quanto la quota di tale punto è inferiore a quella dell'asintoto

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ $\lim_{x\to-1} f(x) = -3$		
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$ $f(0) = 1$		
$f(2) = -2$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$		
$\lim_{x\to 1} f(x) = -3$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$		

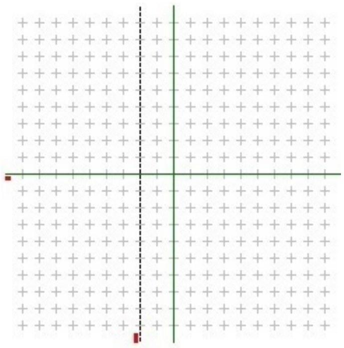
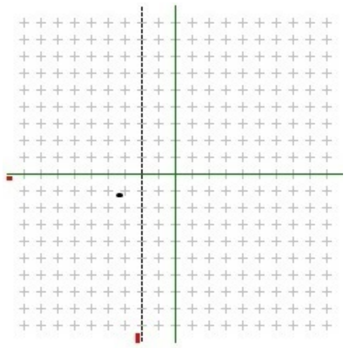
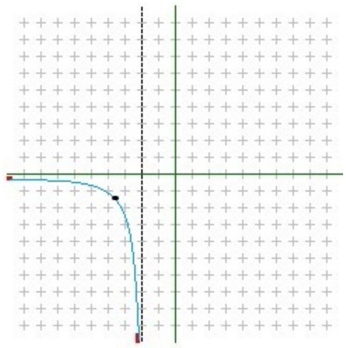
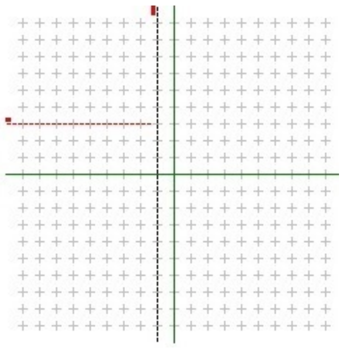
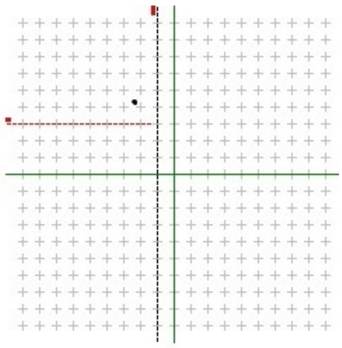
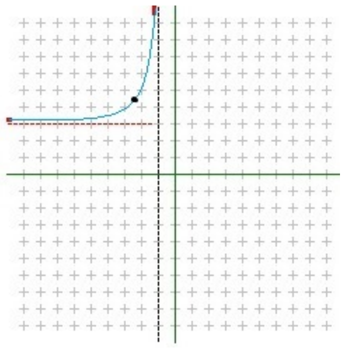
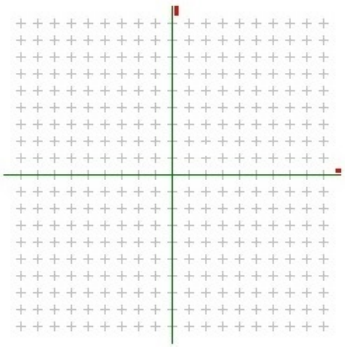
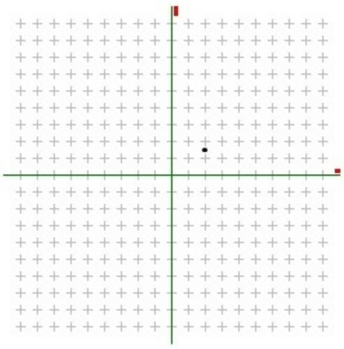
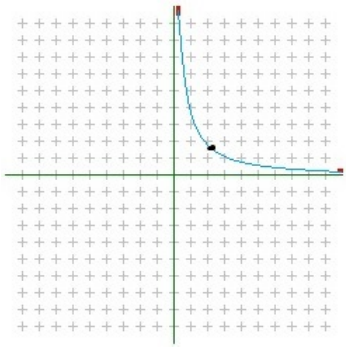
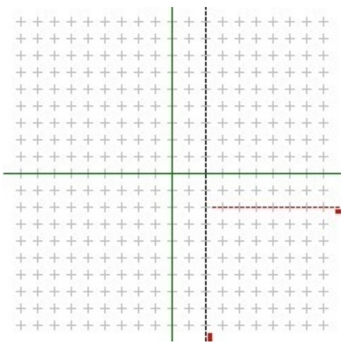
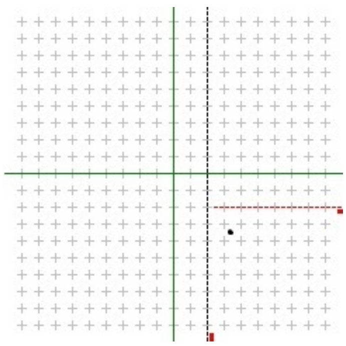
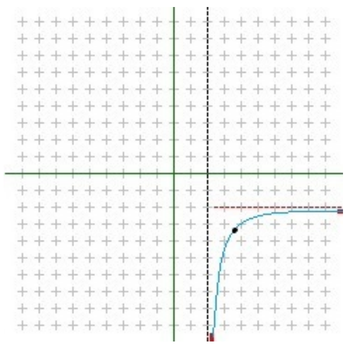
In questi esempi, si collega un punto (puntone o trattino) ad un asintoto orizzontale: la lineetta verticale si mette sopra l'asintoto, in quanto la quota di tale punto è superiore a quella dell'asintoto

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ $\lim_{x\to-1} f(x) = 3$		
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -4$ $f(0) = -1$		
$f(2) = 2$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$		
$\lim_{x\to1} f(x) = 3$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$		

Se invece le due entità sono alla stessa quota, il collegamento può avvenire indifferentemente dall'alto o dal basso, in maniera simile a quando si collegano due punti alla stessa quota.
Conviene inserire un punto sopra o sotto il grafico e poi collegarlo con le due entità: il collegamento con il punto (puntone o trattino) iniziale può anche essere rettilineo, sebbene si preferisce che il collegamento sia tondeggiante.
Negli esempi che seguono vengono mostrate entrambe le possibilità, ma ne va tracciata soltanto una (a scelta): da notare che la lineetta orizzontale è stata messa proprio sull'asintoto, non essendoci modo di stabilire se è sopra o sotto di esso.

<table>
<tr><td rowspan="2">$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
$\lim_{x\to-1} f(x) = 0$</td><td rowspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f(2) = 2$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$</td><td rowspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

C'è anche la possibilità che all'estremità limitata dell'intervallo il limite sia infinito: in maiera simile a quando si collegano due asintoti verticali, si mette un punto in mezzo e si collega con entrambi gli asintoti questo significa dover collegare un asintoto orizzontale con uno verticale.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to-2} f(x) = -\infty$			
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$ $\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$			
$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$			
$\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$			

Riassumendo, ecco come effettuare il collegamento in un intervallo limitato a sinistra e illimitato a destra

- Se a sinistra c'è un punto e a destra un asintoto orizzontale ma a quota diversa, si traccia dal punto una linea verso destra che va avvicinandosi all'asintoto, diventando sempre più orizzontale, ma mai del tutto
- Se a sinistra c'è un punto e a destra un asintoto orizzontale alla stessa quota, dal punto ci si sposta verso destra in alto o in basso (indifferentemente) per poi avvicinarsi all'asintoto
- Se a sinistra c'è un punto e finisce nell'angolo a destra il collegamento può essere rettilineo
- Se a sinistra c'è un asintoto verticale e a destra un asintoto orizzontale, si traccia dal punto in mezzo e si collega con entrambi
- Se a sinistra c'è un asintoto verticale e finisce nell'angolo a destra, si traccia un punto in mezzo a mezza altezza e si collega con l'asintoto e l'angolo

Lo stesso si fa specularmente se l'intervallo è illimitato a sinistra e limitato a destra

- Se a destra c'è un punto e a sinistra un asintoto orizzontale ma a quota diversa, si traccia dal punto una linea verso sinistra che va avvicinandosi all'asintoto, diventando sempre più orizzontale, ma mai del tutto
- Se a destra c'è un punto e a sinistra un asintoto orizzontale alla stessa quota, dal punto ci si sposta verso sinistra in alto o in basso (indifferentemente) per poi avvicinarsi all'asintoto
- Se a destra c'è un punto e finisce nell'angolo a sinistra il collegamento può essere rettilineo
- Se a destra c'è un asintoto verticale e a sinistra un asintoto orizzontale, si traccia dal punto in mezzo e si collega con entrambi
- Se a destra c'è un asintoto verticale e finisce nell'angolo a sinistra, si traccia un punto in mezzo a mezza altezza e si collega con l'asintoto e l'angolo

Schema conclusivo

In conclusione, ognuno degli estremi del grafico può essere una delle seguenti se è limitato

P Puntone o trattino

AO Asintoto orizzontale

Mentre se non è limitato ci sono le opzioni

AV Asintoto verticale

Ang Angolo

Queste le possibili combinazioni dei collegamenti, in base al tipo di estremi a sinistra (S) e a destra (D). Inoltre in alcuni casi si specifica (nella colonna indicata da $*$) se il collegamento è fra elementi alla stessa quota:

Sinistra	Destra	*	COLLEGAMENTO
P	P	No	Rettilineo
		Sí	Da sopra o da sotto, non rettilineo
P	AO	No	Da sinistra a destra, il grafico tende ad appoggiarsi all'asintoto
		Sí	Punto sopra o sotto, si fanno due collegamenti del tipo P-P e P-AO
P	AV		Da sinistra a destra, il grafico schizza in alto o in basso verso l'asintoto
P	Ang		Rettilineo
AO	P	No	Da destra a sinistra, il grafico tende ad appoggiarsi all'asintoto
		Sí	Punto sopra o sotto, si fanno due collegamenti del tipo AO-P e P-P
AO	AV		Punto a mezza altezza, si fanno due collegamenti del tipo AO-P e P-AV
AV	P		Da destra a sinistra, il grafico schizza in alto o in basso verso l'asintoto
AV	AO		Punto a mezza altezza, si fanno due collegamenti del tipo AV-P e P-AO
AV	AV		Punto a mezza altezza, si fanno due collegamenti del tipo AV-P e P-AV
AV	Ang		Punto a mezza altezza, si fanno due collegamenti del tipo AV-P e P-Ang
Ang	P		Rettilineo
Ang	AV		Punto a mezza altezza, si fanno due collegamenti del tipo Ang-P e P-AV