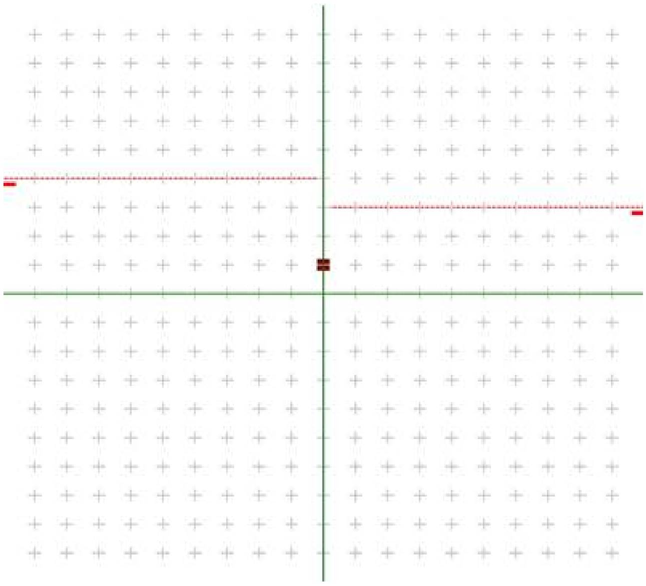
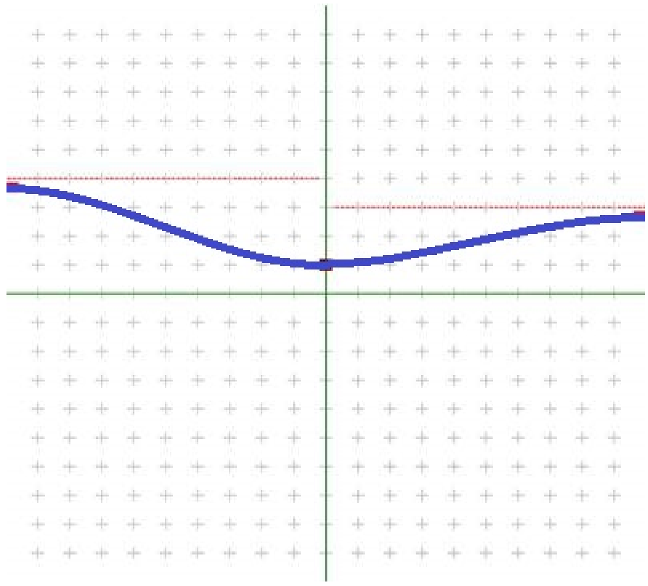
LIMITI NELLE FUNZIONI REALI

Si è visto come per un intervallo, specificare agli estremi il limite, non dà informazioni sufficienti a disegnare la funzione, ma mette soltanto dei vincoli.
Ecco ora come si può estendere la situazione all'intero insieme dei numeri reali ponendo dei vincoli in corrispondenza di alcuni valori. A questi vanno sempre aggiunti gli estremi, ossia i limiti all'infinito (positivo e negativo)
Si parte dal caso più semplice, in cui c'è un solo valore su cui si specifica cosa succede, lo zero.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4 \qquad f(0) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

Il grafico di una funzione di questo tipo è l'unione di due grafici di funzioni definite sugli intervalli illimitati a sinistra e a destra dello zero. una definita nell'intervallo tra $-\infty$ e 0 dove $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$ e $f(0) = 1$; l'altra definita tra 0 e $+\infty$, dove $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$. Ecco quindi il grafico, disegnato come consuetudine in due passaggi: prima si segnano tramite linnette e un puntone nei punti specifici, e poi vengono svolti i collegamenti.

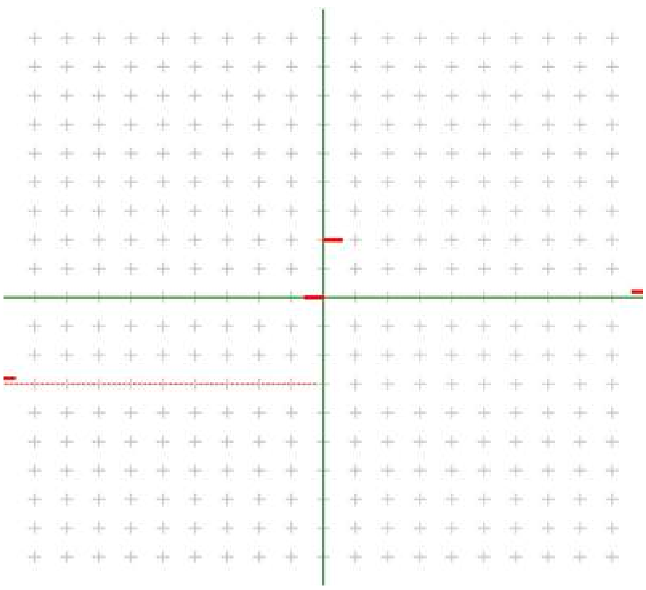


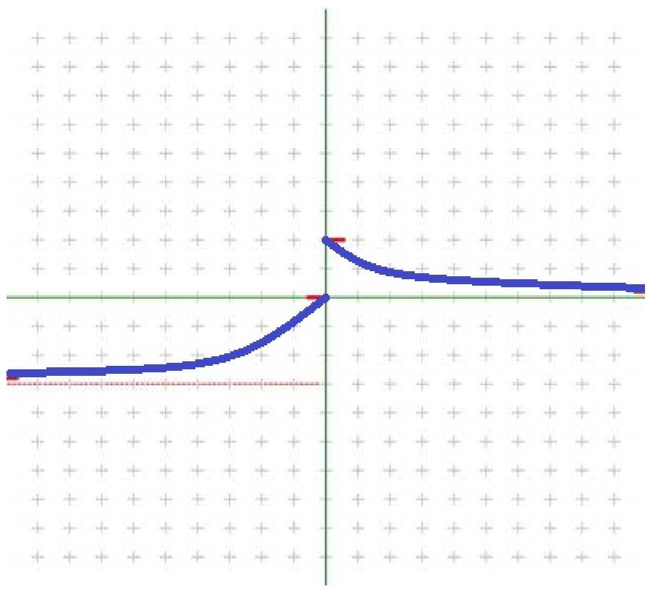


Da notare come già il primo passaggio rende l'idea di cosa succede in ognuna alle estremità di ognuna delle due fasce verticali in cui il piano viene diviso dall'asse verticale (ossia dalla retta $x = 0$, proprio lo 0 che rappresenta il valore su cui era stato specificato l'andamento della funzione).
Ma per $x = 0$, invece che dichiarare il valore, si possono specificare il limite sinistro (indicato come $\lim_{x\to0^-}$) e il limite destro ($\lim_{x\to0^+}$), come in questo esempio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3 \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = 2 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

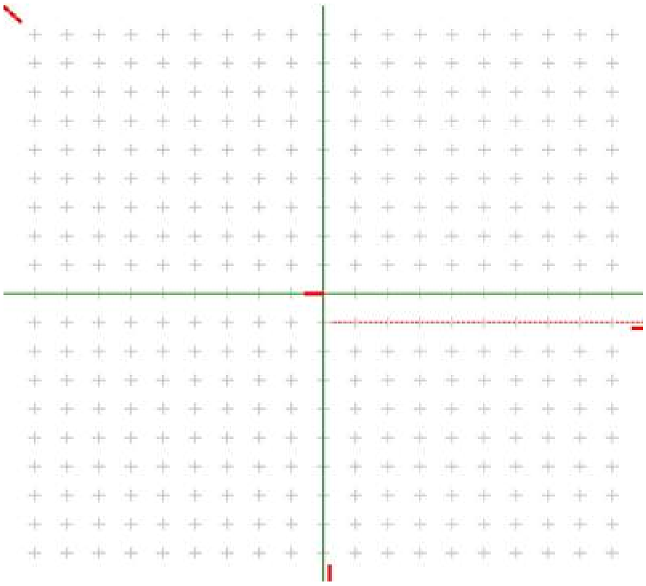
Anche in questo il grafico è l'unione due grafici di funzioni definite negli stessi intervalli di prima, con l'unica differenza che sullo zero, che funge da estremo destro in un intervallo e da estremo sinistro nell'altro, si trova un limite anziché un valore definito A sinistra c'è una funzione con dominio $]-\infty, 0[$ in cui $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$ e $\lim_{x\to0} f(x) = 0$, a destra una con dominio $]0, +\infty]$ dove $\lim_{x\to0} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ecco il grafico: notare come in corrispondenza dell'asse verticale ci sono due beccucci, uno rivolto verso sinistra ad altezza 0 (limite sinistro), uno verso destra ad altezza 2 (limite destro).

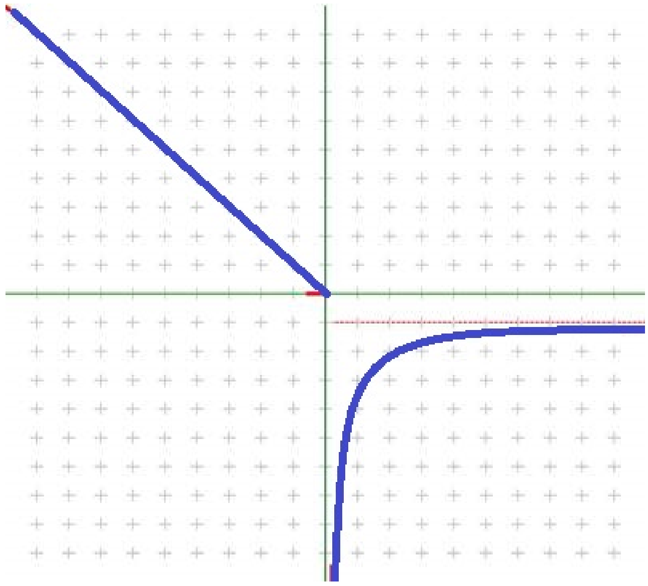




Nulla vieta che ci siano dei limiti infiniti:

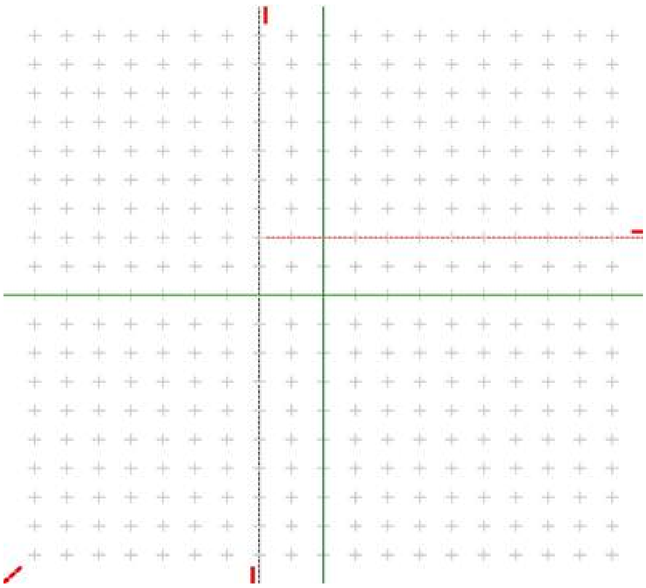
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

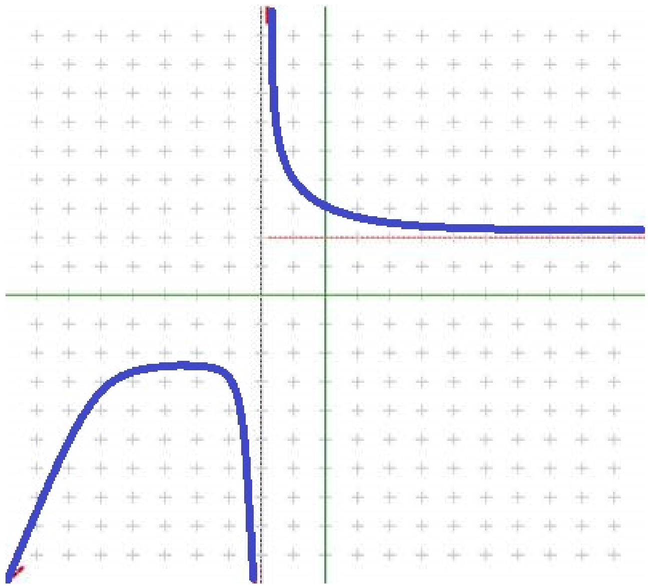




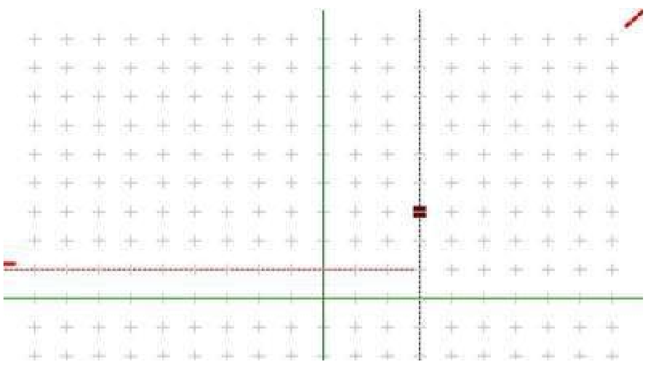
Finora si sono visti esempi in cui il vincolo è su $x = 0$, ma può essere anche in corrispondenza di un altro valore: in tal caso bisogna prima disegnare la retta verticale corrispondente a tale valore di x (quando $x = 0$ tale retta già c'è, è l'asse verticale). Ecco due esempi:

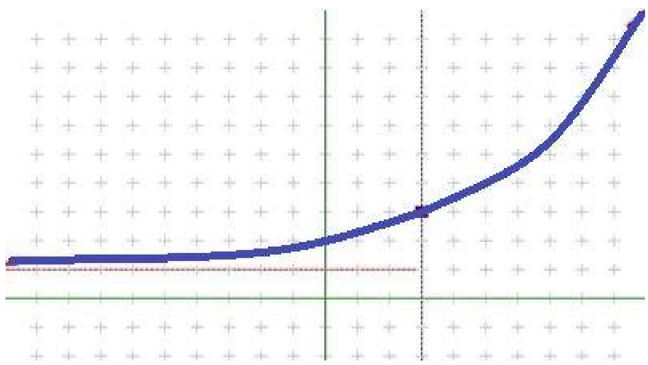
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-2+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$





$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \qquad f(3) = 3 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

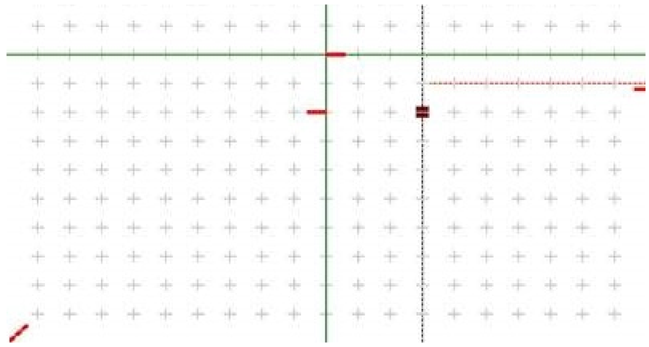
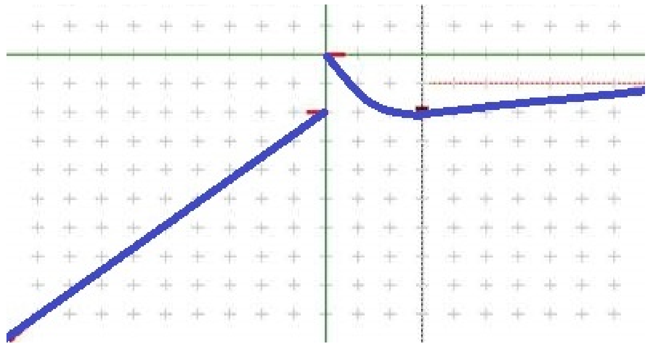




I valori di x su cui viene vincolata la funzione possono essere più di uno, in ognuno dei quali può essere definito il valore della funzione oppure una coppia di limiti (destro e sinistro): ecco un esempio con due valori, in corrispondenza dei quali si definisce una coppia di limiti. Si introduce una nuova convenzione, quella di dichiarare per ultimi i limiti all'infinito (nonostante, guardando il grafico da sinistra a destra $\lim\limits_{x\to-\infty}$ dovrebbe essere il primo).

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \qquad f(3) = 2 \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -1$$

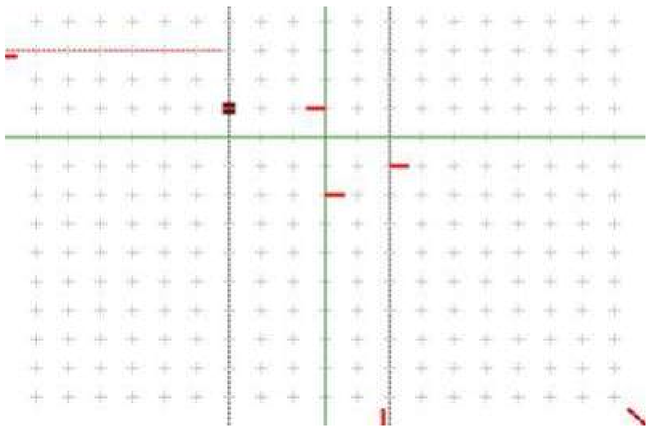
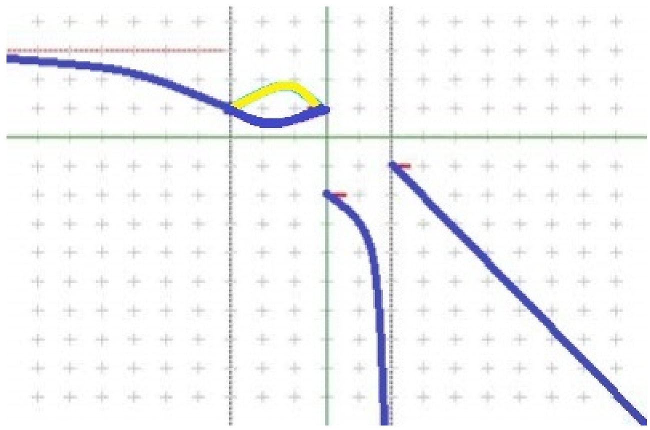
Va notato come questa volta la funzione viene disegnata in tre intervalli, di cui quello contrale è limitato (tra 0 e 3)

Ora un esempio con tre valori: il grafico si rappresenta in quattro intervalli, i due centrali limitati, i due estremi (come sempre) illimitati.

$$f(-3) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = -1 \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

In questo caso il collegamento nell'intervallo tra -3 e 0 potrebbe essere orizzontale. Ma, come già vistopwe gli intervalli, se si aggiunge la richiesta "senza tratti orizzontali" tale collegamento deve passare o sopra o sotto. Se si devono collegare due punti alla stessa quota, se uno dei due è un valore definito, cioè quando nel grafico compare un puntone (nel caso in questione a sinistra, cioè per $x = -3$) la convenzione è di fare in modo che il grafico prosegua nel suo andamento crescente o decrescente in corrispondenza di tale punto: pertanto, in questo caso visto che il grafico arriva a sinistra di $x = -3$ con andamento decrescente, prosegue anche oltre con lo stesso andamento, per poi risalire: qui sotto la rappresentazione preferenziale, in cui viene mostrata in giallo l'opzione, pur corretta, sconsigliata.

In maniera analoga si può rappresentare una funzione reale con un numero qualsiasi di vincoli, su ognuno dei quali viene definito il valore della funzione oppure una coppia di limiti.
Analoga convenzione si usa quando un puntone viene collegato ad un asintoto alla stessa quota.

$$f(0) = 3 \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 5$$