LIMITI A VALORI FINITI

Data una funzione f e due valori a, L (ognuno dei quali puo essere infinito), la notazione

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

significa che per valori molto vicini ad a, la funzione assume valori molto vicini a L ricordando, come visto in UdA1, che "vicino a infinito" significa "molto grande".
In questo paragrafo verrà trattato il caso in cui il valore a su cui calcolare il limite sia finito.

LIMITI IN UN POLINOMIO

Dato un polinomio P e un valore finito a, il limite $\lim\limits_{x\to a} P(x) = a$ vale esattamente $P(a)$, ovvero basta sostituire x con il valore a nel polinomio e calcolare il risultato. Ecco tre esempi:

$$\lim_{x\to -2} -x-5 = 2-5 = -3 \qquad \lim_{x\to 3} x^2-4 = 3^2-4 = 9-5 = 4 \qquad \lim_{x\to 0} x^3-7x+8 = 8$$

In questo caso, quindi, il concetto di limite è inutile, non agginge nulla alla valutazione $P(a)$

LIMITI IN UNA FUNZIONE RAZIONALE

Come per i polinomi, anche nelle funzioni razionali, il limite $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$ vale esattamente $f(a)$:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x+4}{x-2} = \frac{-2+4}{-2-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 3} \frac{-x+3}{x^2-1} = \frac{-3+3}{3^2-1} = \frac{0}{8} = 0$$

Anche in casi come questi, quindi, il concetto di limite è inutile e non agginge nulla alla semplice valutazione.
Le cose cambiano se il denominatore vale 0, in quanto in tal caso $f(a)$ non è definito: ma il limite non dice cosa succede esattamente per quel valore, ma per valori molto vicini ad esso: e questo significa dividere per un valore molto vicino a zero, che, se il dividendo non è a sua volta molto piccolo (situazione $0/0$) dà come risultato un numero molto grande. Ad esempio:

$$1 : 0,000001 = 1000000 \qquad 3 : 0,0000001 = 30000000$$

Dato che "molto grande" equivale a dire "vicino a infinito", data una funzione razionale $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ e un valore a, ecco quanto vale $\lim\limits_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$

$$\frac{P(a)}{Q(a)} \text{ se } Q(a) \neq 0 \qquad \infty \text{ se } P(a) \neq 0 \text{ e } Q(a) = 0 \qquad \textit{indeterminato} \text{ se } P(a) = 0 \text{ e } Q(a) = 0$$

Tralasciando l'ultimo caso, che verrà trattato in UdA4, si può dire che, a livello di limiti, l'impossibile operazione di dividere per 0 diventa possibile passando ai limiti, e dà come risultato ∞. Si era visto in UdA1 che il limite non può essere semplicemente infinito, ma deve avere un segno positivo ($+\infty$) o negativo ($-\infty$): per stabilire questo bisogna passare dallo studio del segno, per il momento ci si limita a scrivere ∞ lasciando in sospeso il suo segno.
Ecco due esempi in cui limite è infinito:

$$\lim_{x\to -3} \frac{x+4}{x^2+2x-3} = \frac{-3+4}{(-3)^2+2\cdot(-2)-3} = \frac{1}{9-6-3} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x}{x+2} = \frac{-2}{-2+2} = \frac{-2}{0} = \infty$$

Da notare che l'informazione è incompleta, perché non viene specificato se il limite è $+\infty$ oppure $-\infty$: si vedrà in seguito come tale informazione si ricavi attraverso lo studio del segno, e che non è affatto detto che gli infiniti $\lim\limits_{x\to a^+}$ e $\lim\limits_{x\to a^-}$ abbiano lo stesso segno.