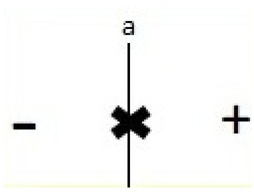
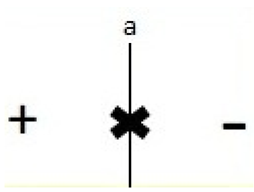
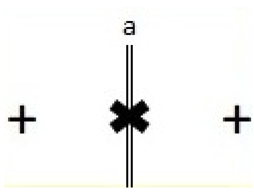
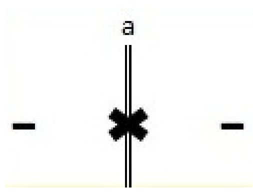
LIMITI INFINITI NELLE FUNZIONI RAZIONALI

Le radici delle funzioni razionali possono essere del numeratore o del denominatore. Trascurando la situazione che siano radici di entrambi (argomento che verrà trattato in UdA4) si ha che

- Le radici del numeratore (corrispondenti ai "puntoni" nello studio del segno) sono gli zeri, quindi se a è una radice del numeratore si ha $f(a) = 0$

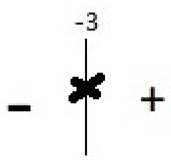
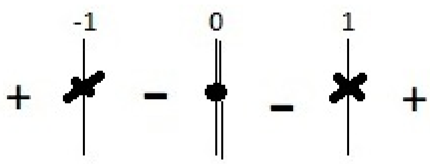
- Le radici del denominatore (corrispondenti alle "crocette" nello studio del segno) sono escluse dalle CdE, quindi se a è una radice del denominatore si ha che $f(a)$ non è definito in quanto si ha la frazione $A/0$: tuttavia, come visto nella sezione relativa ai limiti per valori finiti, il limite è infinito, pertanto in tal caso si ha $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Nel secondo caso tuttavia l'informazione è incompleta, in quanto non viene specificato il segno del limite infinito: questo si ricava dai segni a sinistra e a destra di a, che danno i segni rispettivamente di $\lim_{x\to a^-} f(x)$ e di $\lim_{x\to a^+} f(x)$.
Ecco le situazioni possibili (notare come se la barra è doppia i segni sono uguali, se è singola sono diversi), e i limiti che la funzione assume:

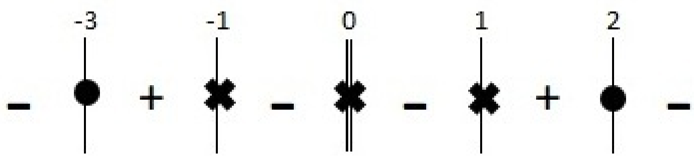
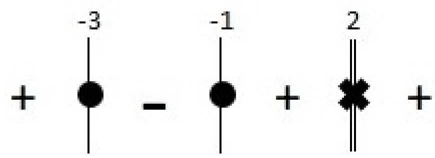
			
$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$	$\lim_{x\to a^\mp} f(x) = \pm\infty$	$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

Nell'ultima riga vengono usate le notazioni rapide per evitare di duplicare la scrittura.

Ecco ora due esempi completi:

<table>
<tr><td>$f(x) = \frac{x^2+1}{2x+6} = \frac{x^2+1}{2(x+3)}$</td><td>$f(x) = \frac{6x^2}{3x^2-3} = \frac{6x^2}{3(x-1)(x+1)}$</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>+</td><td></td><td>R</td><td>M</td></tr><tr><td>$(x+3)$</td><td>D</td><td>-3</td><td>1</td></tr></table></td><td><table><tr><td>+</td><td></td><td>R</td><td>M</td></tr><tr><td>x^2</td><td>N</td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>$(x+1)$</td><td>D</td><td>-1</td><td>1</td></tr><tr><td>$(x-1)$</td><td>D</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\lim_{x\to -3^\pm} f(x) = \pm\infty$</td><td>$\lim_{x\to -1^\mp} f(x) = \pm\infty$
$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$</td></tr>
</table>

Ora altri due esempi: oltre ai limiti per le radice del denominatore, viene scritto anche $f(a) = 0$ per le radici del numeratore

<table>
<tr>
<td>$f(x) = \frac{x^2-x-6}{-x^4+x^2} = -\frac{x^2-x-6}{x^4-x^2} = -\frac{x^2-x-6}{x^2(x^2-1)} = -\frac{(x-3)(x+2)}{x^2(x+1)(x-1)}$</td>
<td>$f(x) = \frac{-x^2-x}{-x^2+4x-4} = \frac{x^2+x}{x^2-4x+4} = \frac{x(x+1)}{(x-2)^2}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>-</td><td></td><td>R</td><td>M</td></tr>
<tr><td>$(x-3)$</td><td>N</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$(x+2)$</td><td>N</td><td>-2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>x^2</td><td>D</td><td>0</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$(x+1)$</td><td>D</td><td>-1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$(x-1)$</td><td>D</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td>
<td>
<table>
<tr><td>$+$</td><td></td><td>R</td><td>M</td></tr>
<tr><td>x</td><td>N</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$(x+1)$</td><td>N</td><td>-1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$(x-2)^2$</td><td>D</td><td>2</td><td>2</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$f(-3) = 0$
$\lim_{x \to -1^{\mp}} f(x) = \pm\infty$
$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \pm\infty$
$f(2) = 0$</td>
<td>f(-3)=0
f(-1)=0
$\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$</td>
</tr>
</table>

LIMITI ALL'INFINITO NELLE FUNZIONI RAZIONALI

Come visto nella sezione riguardante i limiti all'infinito si ha che:

- Se il grado del numeratore è minore di quello del denominatore il limite è zero
- Se il grado del numeratore è uguale a quello del denominatore il limite è il rapporto tra i due coefficienti direttore (solo in questo caso i coefficienti hanno importanza)
- Se il grado del numeratore è maggiore di quello del denominatore il limite è infinito

Nell'ultima delle tre situazioni, bisogna stabilire il segno dell'infinito. Similmente a quanto visto per i limiti delle radici del denominatore, sono i segni alle estremità a stabilire il segno, secondo questo schema, in cui **S** e **D** rappresentano il segno rispettivamente all'estrema sinistra e all'estrema destra:

S	D	
+	+	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$
+	-	$\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x) = \pm\infty$
-	+	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$
-	-	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

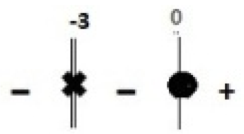
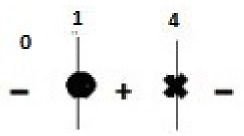
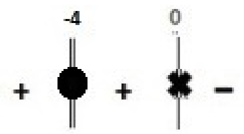
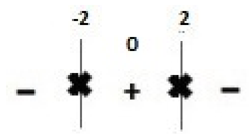
Riferito ai quattro esempi visti in precednza si ha:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{2x+6} = \pm\infty \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{3x^2-3} = \frac{6}{3} = 2 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-6}{-x^4+x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{1}{1} = 1$$

I segni del primo esempio seguono dall'analisi del segno svolta in precedenza.

ELEMENTI CARATTERIZZANTI LE FUNZIONI RAZIONALI

Le prime informazioni da trovare sono $f(0)$ (che può non essere definito) e il limite all'infinito (senza segno se è infinito). In seguito si svolge lo studio del segno e si trovano i valori in corrispondenza delle radici. A questo punto si possono scrivere gli elementi caratterizzanti: se 0 non fa parte delle radici, va inserito (rispettando l'ordine crescente delle x) anche $f(x)$ e si aggiunge il limite all'infinito, con i giusti segni se esso è infinito. Ecco degli esempi:

<table>
<tr><td>Esempio 1</td><td>Esempio 2</td><td>Esempio 3</td><td>Esempio 4</td></tr>
<tr><td>$f(x) = \frac{-x^5-x^3}{-x^2-6x-9}$</td><td>$f(x) = \frac{4x-4}{-x+4}$</td><td>$f(x) = \frac{-x^2+8x-16}{x}$</td><td>$f(x) = \frac{-8x^2-8}{x^2-4}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Trovare $f(0)$ e il limite all'infinito</td></tr>
<tr><td>$f(0) = \frac{0}{-9} = 0$</td><td>$f(0) = \frac{-4}{4} = -1$</td><td>$f(0) = \frac{-16}{0} n.d.$</td><td>$f(0) = \frac{-8}{-4} = 2$</td></tr>
<tr><td>$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$</td><td>$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{4}{-1} = -4$</td><td>$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$</td><td>$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Scomposizione</td></tr>
<tr><td>$f(x) = \frac{x^3(x^2+1)}{(x+3)^2}$</td><td>$f(x) = -\frac{4(x-1)}{(x-4)}$</td><td>$f(x) = -\frac{(x+4)^2}{x}$</td><td>$f(x) = -\frac{8(x^2+1)}{(x+2)(x-2)}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Schema delle radici</td></tr>
<tr>
<td><table><tr><td>+</td><td></td><td>R</td><td>M</td></tr><tr><td>x^3</td><td>N</td><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>$(x+3)^2$</td><td>D</td><td>-3</td><td>2</td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>-</td><td></td><td>R</td><td>M</td></tr><tr><td>$(x-1)$</td><td>N</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>$(x-4)$</td><td>D</td><td>4</td><td>1</td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>-</td><td></td><td>R</td><td>M</td></tr><tr><td>$(x+4)^2$</td><td>N</td><td>-4</td><td>2</td></tr><tr><td>x</td><td>D</td><td>0</td><td>1</td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>-</td><td></td><td>R</td><td>M</td></tr><tr><td>$(x+2)$</td><td>D</td><td>-2</td><td>1</td></tr><tr><td>$(x-2)$</td><td>D</td><td>2</td><td>1</td></tr></table></td>
</tr>
<tr><td colspan="4">Studio del segno: se 0 non è fra le radici, lo si inserisce (all'interno di una fascia, senza che incida sui segni)</td></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

Con queste informazioni si possono scrivere gli elementi caratterizzanti, che includono anche il limite all'infinito. Ecco i risultati dei quattro esempi:

1. $f(0) = 0$ $\quad \lim_{x\to -3} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$
2. $f(0) = -1$ $\quad f(1) = 0$ $\quad \lim_{x\to 4^{\mp}} f(x) = \pm\infty$ $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 4$
3. $f(-4) = 0$ $\quad \lim_{x\to 0^{\mp}} f(x) = \pm\infty$ $\quad \lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \pm\infty$
4. $\lim_{x\to -2^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ $\quad f(0) = 2$ $\quad \lim_{x\to 2^{\mp}} f(x) = \pm\infty$ $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -2$