GRAFICO DI UNA FUNZIONE

La rappresentazione grafica di una funzione si compone di due passaggi, il primo dei quali corrisponde a quanto visto alla fine di UdA2 (elementi caratterizzanti la funzione), il secondo alla tracciatura del grafico vista in UdA1. Come si vedrà, però, ci saranno alcune scorciatoie che permetteranno di ricavare la maggior parte delle informazioni dallo studio del segno.
Si era visto in UdA1 che il grafico si crea collegando gli elementi che caratterizzano la funzione. Ecco come lo schema delle radici viene tradotto in grafico.

1. Si tracciano delle linee verticali corrispondenti alle radici (se lo zero è una di queste non serve tracciarla, in quanto coincide con l'asse verticale): questo divide il piano in varie fasce verticali
2. In corrispondenza delle radici del numeratore (puntone) si segna un puntone a quota zero
3. In corrispondenza delle radici del denumeratore (crocetta) si segna una coppia di trattini, uno all'immediata sinistra e uno all'immediata destra della linea verticale. Se il segno a sinistra (destra) della radice è positivo, il trattino a sinistra (destra) della linea sarà in alto, se negativo sarà in basso

Va notato che, per quanto riguarda ognuna delle radici del denominatore, non necessariamene sono una in alto e una in basso (mentre sono sicuramente una a sinistra e una a destra): anzi, se la moltepicità della radice è pari (doppia stanghetta con conservazione del segno, nello schema delle radici), i trattini sono entrambi in alto o entrambi in basso.
A queste informazioni vanno aggiunti il valore in zero e all'infinito:

4. Se lo zero non è una delle radici, sull'asse verticale si segna un puntone a quota $f(0)$
5. Per quanto riguarda il limite all'infinito, la situazione cambia a secondo se esso è finito o infinito
   (a) Se il limite è infinito, ci saranno un trattino obliquo in un angolo a sinistra e uno nell'angolo a destra: se il segno all'estrema sinistra (destra) è positivo, ci sarà un trattino nell'angolo in alto a sinistra (destra), se invece è negativo il trattino sarà nell'angolo in basso a sinistra (destra)
   (b) Se il limite è finito, si tracciano due semirette orizzontali (asintoti) nelle fasce verticali più laterali (quella più a sinistra e quella più a destra) alla quota del limite stesso e si segna alle estremità, vicino agli asintoti. Sopra o sotto? Come visto in UdA1, si confronta con l'elemento a cui esso andrà collegato, in maniera che il trattino e l'altro elemento siano dalla stessa parte rispetto all'asintoto. Verrà visto in seguito come gestire la situazione nel caso in cui gli elementi da collegare siano alla stessa quota.

Negli esempi che seguiranno, onde evitare di collegare elementi troppo vicini, si considerano due quadretti come unità (rappresentata dai riferimenti più scuri). Nella prima parte di ognuno di essi si mostreranno in successione:

1. Il valore in zero e il limite all'infinito
2. La scomposizione
3. Lo schema delle radici
4. Lo schema dei segni
5. Gli elementi caratterizzanti

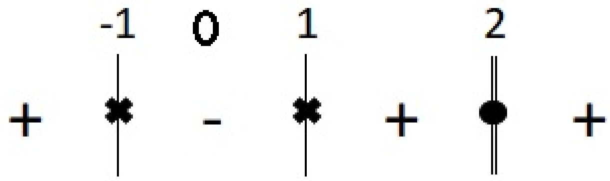
Successivamente viene tracciato il grafico, prima con i suoi elementi caratterizzanti (per i quali, come precedentemente spiegato, non servirà guardare il risultato finale della prima parte), e poi con i collegamenti (con particolare attenzione a come si collegano due elementi a quota zero).

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1}$$

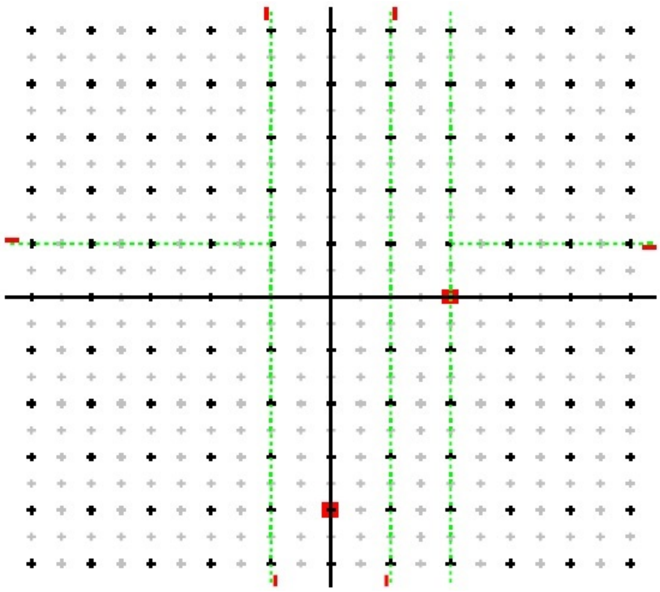
$$f(0) = \frac{4}{-1} = -4 \qquad\qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-1)}$$

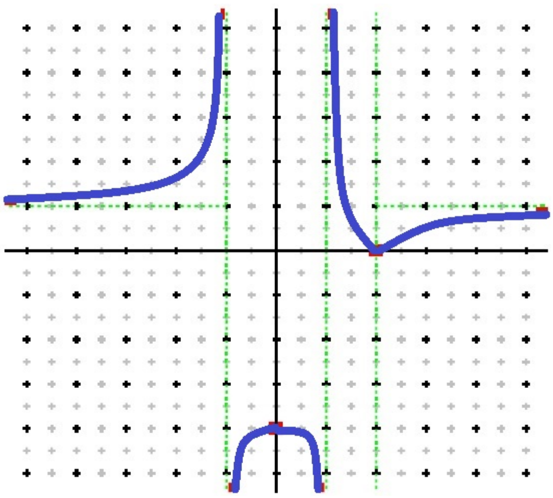
+		R	M
$(x-2)^2$	N	2	2
$(x+1)$	D	1	1
$(x-1)$	D	-1	1



$$\lim_{x\to -1^{\mp}} f(x) = \pm\infty \qquad f(0) = -4 \qquad \lim_{x\to 1^{\pm}} f(x) = \pm\infty \qquad f(2) = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$



Tracciate le linee verticali per x uguale per $x = -1$, per $x = 1$ e per $x = 2$, si è tracciato un puntone a quota 0 in corrispondenza di $x = 2$ (puntone nello schema delle radici), mentre a lato di $x = -1$ e di $x = -1$ sono stati tracciati dei segni in alto o in basso coerentemente con i segni (per $x = -1$ è negativo a sinistra e positivo a destra, per $x = 1$ il contrario). Inoltre sull'asse verticale è stato segnato un puntone a quota 4 (ovvero $f(0)$). Infine nelle fasce laterali sono stati tracciati due asintoti orizzontali a quota 1 (limite all'infinito), alle estremità dei quali è stato tracciato un piccolo segno: a sinistra è sotto l'asintoto, in quanto andrà collegato con un asintoto verticale all'estremità superiore, a destra è sotto di esso in quanto verrà collegato con un punto a qota zero (dunque inferiore alla quota 1 dell'asintoto). Ora si possono tracciare i collegamenti

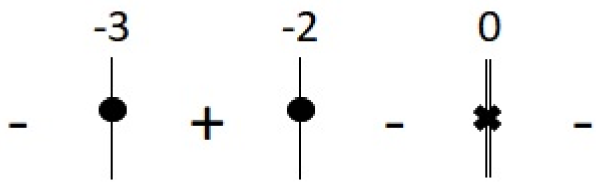


$$f(x) = \frac{-x^2 - 5x - 6}{2x^4}$$

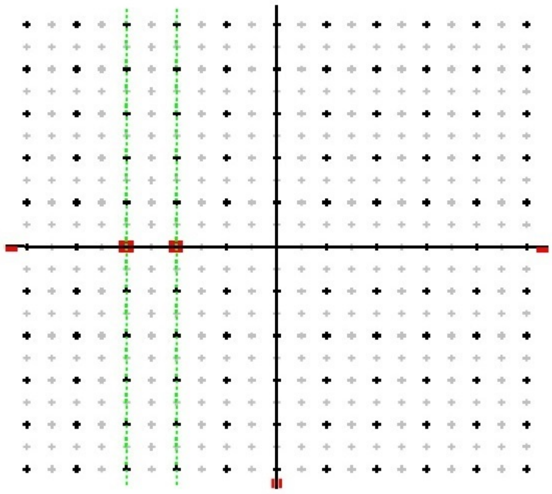
$$f(0) = \frac{-6}{0} = n.d. \qquad\qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

$$f(x) = -\frac{x^2 + 5x + 6}{2x^4} = -\frac{(x+3)(x+2)}{2x^4}$$

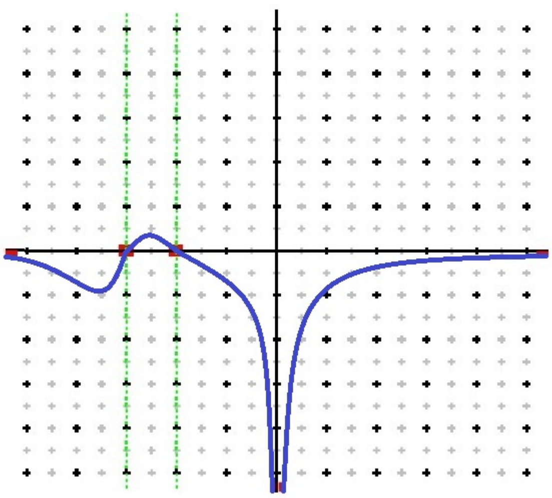
-		R	M
$x+3$	N	-3	1
$x+2$	N	-2	1
x^4	D	0	4



$$f(-3) = 0 \qquad f(-2) = 0 \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$



Va notato che in corrispondenza della radice del denominatore ($x = 0$) i trattini sono entrambi in basso, in quanto il segno è negativo sia a sinistra che a destra della radice 0. Gli asintoti orizzontali sono a quota zero, e quello a sinistra va collegato con un punto che si trova a sua volta a quota zero: perché il segno è stato messo sotto l'asintoto? In UdA1 vi era sempre la mezione "senza tratti orizzontali", che vieta di collegare i due punti con una linea orizzontale, ed in cui si poteva farlo passare indifferentemente da sopra o da sotto. Le funzioni razionali non hanno mai tratti orizzontali, ma il collegamento tra due punti a quota zero non va fatto a scelta, ma secondo il segno presente nello schema: siccome all'estrema sinistra il segno è negativo, il grafico sarà sotto lo zero nella fascia più a sinistra.
Ora si possono tracciare i collegamenti: fra $x = -3$ e $x = -2$ vengono collegati due punti a quota zero: in maniera simile a quanto appena visto per l'asintoto orizzontale, a determinare se il collegamento va svolto da sopra o da sotto è ancora una volta lo schema dei segni, questa volta il segno tra le due radici: essendo positivo, il collegamento è sopra l'asse orizzontale.

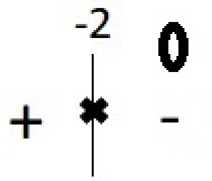


$$f(x) = \frac{x^2+4}{-2x-4}$$

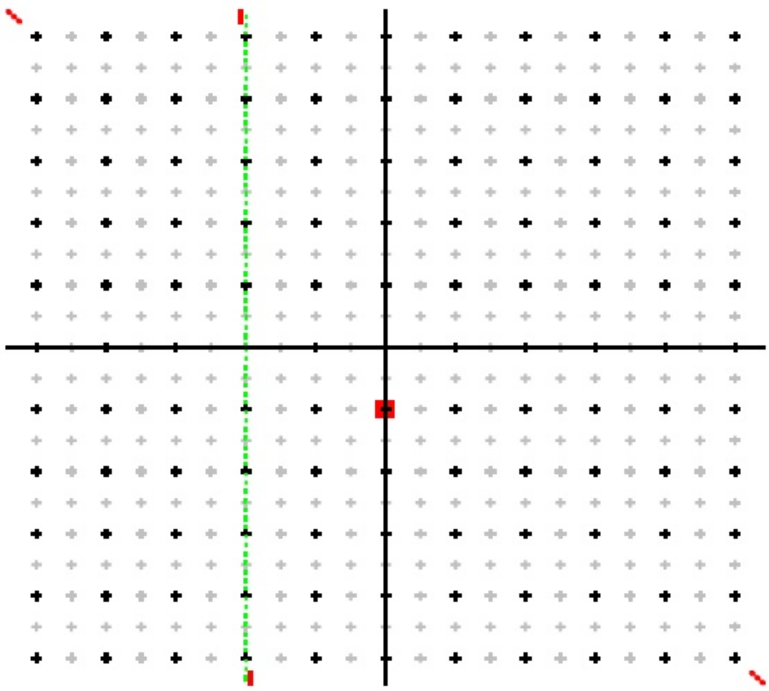
$$f(0) = \frac{4}{-4} = -1 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$f(x) = -\frac{x^2+4}{2x+4} = -\frac{x^2+4}{2(x+2)}$$

-		R	M
$x+2$	D	-2	1



$$\lim_{x\to -2^{\mp}} f(x) = \pm\infty \qquad f(0) = -1 \qquad \lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \pm\infty$$



Dato che il limite all'infinito è infinito, le estremità del grafico sono negli angoli. Ancora una volta è lo schema dei segni a suggerire la posizione: l'angolo in alto a sinistra, essendo il segno all'estrema sinistra positivo; quello in basso a destra, essendo il segno all'estrema destra negativo.