Divisione fra zeri

Si era visto precedentemente che, dato un numero N diverso da zero si ha:

$$\frac{0}{N} = 0 \qquad\qquad \frac{N}{0}\text{non definito}$$

Passando ai limiti, ricordando che il limite coincide con il valore della funzione se definito, vale infinito se si divide per zero, il limite delle funzioni precednti valgono rispettivamente zero e infinito. Nella divisione tra zeri, le due regole vanno a collidere: se per quanto riguarda il valore della frazione, esso non è definito, nulla si può dire sul limite.
Dal momento che le radici di un polinomio P sono i valori a tali che $P(0) = 0$, data una funzione razionale f, se a è una radice del numeratore si ha $f(a) = 0/a = 0$, mentre se a è radice del denominatore si ha $(f(a) = a/0$ e non è definito, ma $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e tramite lo studio del segno si risale poi al segno (anzi ai segni, visto che c'è un limite sinistro e un limite destro) del limite infinito. Se invece a è una radico comune si trova che $f(a) = 0/0$ e dunque non è definito, ma a prima vista non si può dire nulla anche sul limite. Il problema si risolve semplificando la funzione, operazione che elimina la possibilità di radici comuni. A questo punto si opera con la funzione semplificata, dove sicuramente è possibile trovare il limite. Notare bene che si parlerà sempre di limite: se a è una radice comune della funzione f si ha, come già detto, che $f(a)$ non è definita. Se g è la funzione semplificata, in generale (non sempre) il valore $g(a)$ esiste, e questo sarà anche il valore del limite: esso sarà sempre il valore del limite della funzione f. Quindi si troverà una situazione del tipo $\lim_{x\to a} f(x) = L$, in cui sia a che L sono numeri, cosa che nella precedente UdA non capitava mai. Rispetto a $f(a) = L$ qual è la differenza? Sta nel fatto che nel caso del limite il grafico presenta un'interruzione per $x = a$, al grafico viene tolto un punto: si parla pertanto di discontinuità eliminabile, in quanto c'è un "buco" delle dimensioni di un punto che basterebbe riempire affinché il grafico sia una linea continua.

Radici comuni di molteplicità uguale

Ecco un esempio di funzione razionale avente una radice comune:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x + 2}$$

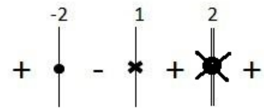
Come di consueto, si calcolano prima di tutto il limite all'infinito e $f(0)$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1 \qquad\qquad f(0) = \frac{-4}{2} = -2$$

Poi si scompone (ma ancora non si semplifica), si rappresenta lo schema delle radici e poi quello del segno: la comune radice -2 ha molteplicità doppia (una per il numeratore e una per il denominatore) e su di essa si mettono sia il puntone che la crocetta.

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+1)}$$

+		R	M
$(x+2)$	N	-2	1
$(x-2)$	N	2	1
$(x+2)$	D	-2	1
$(x+1)$	D	-1	1



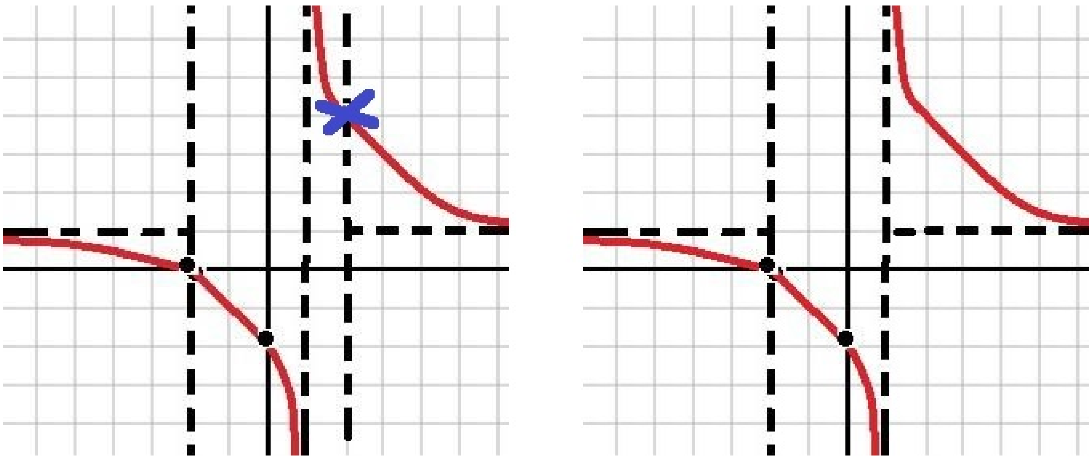
Se per la radice 2 del numeratore e per la radice -1 del denominatore si procede come di consueto, il limite per la comune radice -2 si calcola sostituendo tale valore nella funzione semplificata: da notare che, essendo questa radice compresa tra intervalli di segno positivo (così risulta dallo schema dei segni), essa avrà sicuramente segno positivo (utile come controllo incrociato):

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{(x-2)}{(x+1)} = \frac{(-2-2)}{(-2+1)} = \frac{-4}{-1} = 4$$

Con questo si possono finalmente scrivere gli elementi caratterizzanti:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x \to -1^{\mp}} f(x) = \pm\infty \qquad f(0) = -2 \qquad f(2) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = 1$$

Ecco la sua rappresentazione grafica (a sinistra): la crocetta rappresenta il punto in cui la funzione si interrompe (pur venendo rappresentata come se ci passasse). A titolo di confronto, viene illustrata anche la rappresentazione grafica della funzione semplificata: è identica, eccetto per il fatto che la semplificazione elimina tale interruzione, motivo per cui questa viene definita "discontinuità eliminabile".



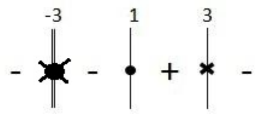
Altri due esempi, intervallati dalle rappresentazioni grafiche. Da notare che, nel calcolo del limite, la frazione finale, ognuno dei cui termini può essere positivo o negativo, può essere preceduta da un segno negativo, quindi si trovano fino a tre segni negativi: se sono in numero dispari (uno o tre) il segno è negativo, se in numero pari (nessuno o due) è positivo. Da notare anche che nel secondo esempio la comune radice 0 ha molteplicità 2 in entrambi i termini della frazione: non cambia nulla, perché la molteplicità è la stessa.

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6x - 9}{-x^2 + 9}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{3}{-1} = -3 \qquad\qquad f(0) = \frac{-9}{9} = -1$$

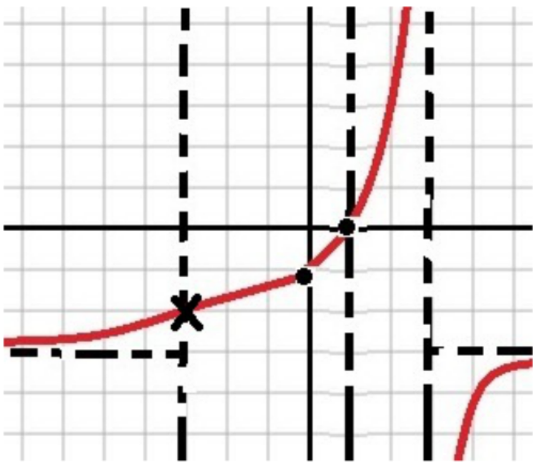
$$f(x) = -\frac{3(x-1)(x+3)}{(x-3)(x+3)}$$

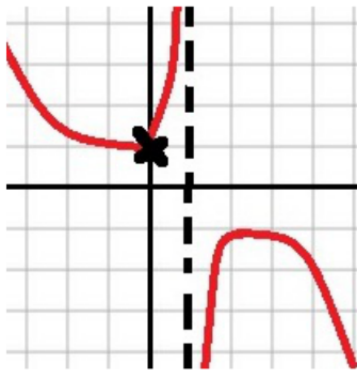
-		R	M
$x-1$	N	1	1
$x+3$	N	-3	1
$x-3$	D	3	1
$x+3$	D	-3	1



$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} -\frac{3(x-1)}{(x-3)} = -\frac{3(-3-1)}{(-3-3)} = -\frac{-12}{-6} = -2$$

$$\lim_{x\to -3} f(x) = -2 \qquad f(0) = -1 \qquad f(1) = 0 \qquad \lim_{x\to 3^{\mp}} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -3$$



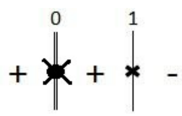


$$f(x) = \frac{-x^4 - x^2}{x^3 - x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad\qquad f(0) = \frac{0}{0} = n.d.$$

$$f(x) = -\frac{x^2(x^2+1)}{x^2(x-1)}$$

-		R	M
x^2	N	0	2
x^2	D	0	2
$x-1$	D	1	1



$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -\frac{(x^2+1)}{(x-1)} = -\frac{(0+1)}{(0-1)} = -\frac{1}{-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 1^{\mp}} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to \mp\infty} f(x) = \pm\infty$$

Radici comuni di molteplicità diversa

Come si era visto nella sezione dedicata alla semplificazione, se un fattore comune al numeratore e al denominatore di una frazione hanno esponenti diversi, in fase di semplificazione rimane solo il fattore con esponente maggiore: di conseguenza, se hanno una radice comune (nella funzione originale) con molteplicità diversa, sopravvive come radice solo dove la molteplicità è maggiore. Invece nei casi trattati precedentemente, il fattore comune scompariva del tutto e la radice comune cessava, al momento della semplificazione, di essere una radice

Molteplicità superiore al numeratore

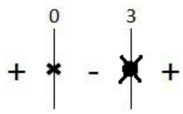
Ecco un esempio: la comune radice 3 ha complessivamente molteplicità 3 (2 dal numeratore e 1 dal denominatore), pertanto la barra in corrispondenza della radice comune è singola.

$$f(x) = \frac{-x^2+6x-9}{-x^2+3x}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{-1}{-1} = 1 \qquad\qquad f(0) = \frac{-9}{0} n.d.$$

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x(x-3)}$$

+		R	M
$(x-3)^2$	N	3	2
x	D	0	1
$x-3$	D	3	1

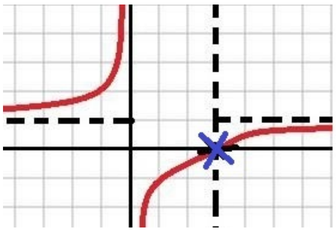


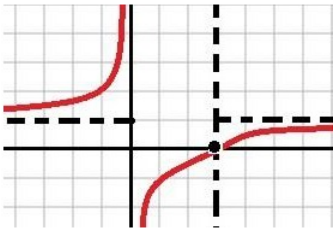
$$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \frac{(x-3)}{x} = \frac{(3-3)}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

In realtà non è necessario svolgere quest'ultimo calcolo, in quanto, come spiegato nell'introduzione a questo paragrafo, la comune radice 3 è, nella funzione semplificata, radice del numeratore (dove la molteplicità è maggiore) e dunque in una simile situazione il risultato è sicuramente 0.

$$\lim_{x\to0^\mp} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to3} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

Qui sotto a sinistra la rappresentazione grafica della funzione; a titolo di esempio si mostra a destra il grafico della funzione semplificata, che in corrispondenza della comune radice 3 vale 0 (mentre nell'originale c'è un'interruzione).





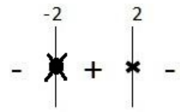
Altri due esempi di questo tipo, intervallati dalle rappresentazioni grafiche: non vengono svolti i calcoli per il limite relativo alla radice comune in quanto, alla luce delle precedenti considerazioni, esso vale 0. Da notare che nel secondo esempio la barra in corrispondenza della radice comune è doppia in quanto tale radice ha molteplicità complessiva 4.

$$f(x) = \frac{x^2+4x+4}{-x^2+4}$$

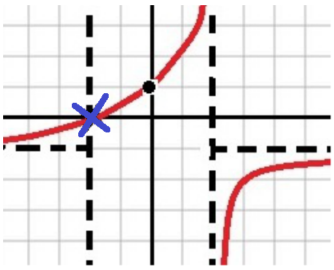
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{-1} = -1 \qquad f(0) = \frac{4}{4} = 1$$

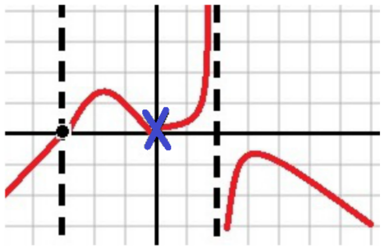
$$f(x) = -\frac{(x+2)^2}{(x-2)(x+2)}$$

-		R	M
$(x+2)^2$	N	-2	2
$x-2$	D	2	1
$x+2$	D	-2	1



$$\lim_{x\to-2} f(x) = 0 \qquad f(0) = 1 \qquad \lim_{x\to 2^{\mp}} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -1$$



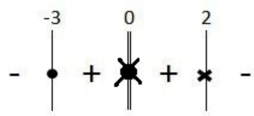


$$f(x) = \frac{-2x^4-6x^3}{x^2-2x}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad f(0) = \frac{0}{0} = n.d.$$

$$f(x) = -\frac{2x^3(x+3)}{x(x-2)}$$

-		R	M
x^3	N	0	3
$x+3$	N	-3	1
x	D	0	1
$x-2$	D	2	1



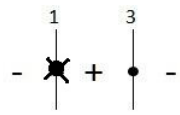
$$f(-3) = 0 \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 2^{\mp}} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

Molteplicità superiore al denominatore

Ecco un esempio: la comune radice 3 ha complessivamente molteplicità 3 (2 dal numeratore e 1 dal denominatore), pertanto la barra in corrispondenza della radice comune è singola.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{-x^2 + 2x - 1}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{1}{-1} = -1 \qquad f(0) = \frac{3}{-1} = -3$$



$$f(x) = -\frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)^2}$$

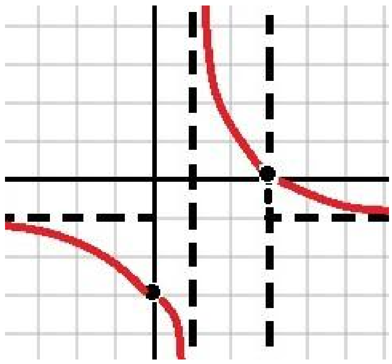
-		R	M
$(x-3)$	N	3	1
$(x-1)$	N	1	1
$(x-1)^2$	D	1	2

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x-3}{x-1} = \frac{(1-3)}{1-1} = \frac{-2}{0} = \infty$$

In realtà la frazione risulterebbe non definita, ma il limite è infinito. E non è necessario svolgere quest'ultimo calcolo, in quanto, come spiegato nell'introduzione a questo paragrafo, la comune radice 1 è, nella funzione semplificata, radice del denominatore (dove la molteplicità è maggiore) e dunque in una simile situazione il risultato è sicuramente ∞ (con

$$f(0) = -3 \qquad \lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \pm\infty \qquad f(3) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -1$$

Diversamente dai casi in cui la radice ha al numeratore molteplicità uguale o superiore, in cui la funzione originale contiene una discontinuità eliminabile che la funzione semplificata non presenta, in questo caso anche la funzione semplificata ha una discontinutà (limite infinito) ed è uguale a quella originale



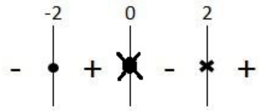
Altri due esempi di questo tipo, intervallati dalle rappresentazioni grafiche: non vengono svolti i calcoli per il limite relativo alla radice comune in quanto, alla luce delle precedenti considerazioni, esso vale ∞.

$$f(x) = \frac{-x^2 - 2x}{-x^3 + 2x^2}$$

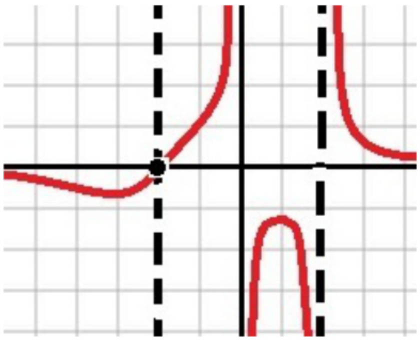
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad\qquad f(0) = \frac{0}{0} n.d.$$

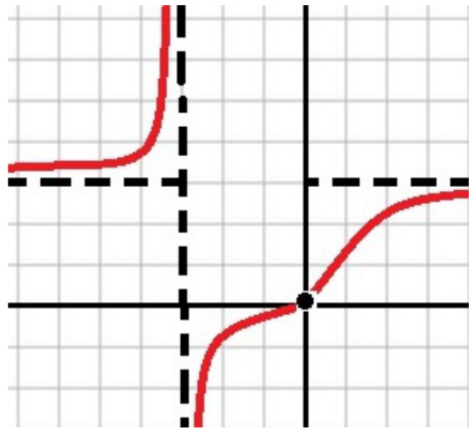
$$f(x) = \frac{x(x+2)}{x^2(x-2)}$$

+		R	M
x	N	0	1
$(x+2)$	N	-2	1
x^2	D	0	2
$(x-2)$	D	2	1



$$f(-2) = 0 \qquad \lim_{x\to 0^{\mp}} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to 2^{\pm}} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$



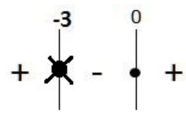


$$f(x) = \frac{3x^2 + 9x}{x^2 + 6x + 9}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{3}{1} = 3 \qquad\qquad f(0) = \frac{0}{9} = 0$$

$$f(x) = \frac{3x(x+3)}{(x+3)^2}$$

+		R	M
x	N	0	1
$x+3$	N	-3	1
$(x+3)^2$	D	-3	2



$$\lim_{x\to -3^{\mp}} f(x) = \pm\infty \qquad f(0) = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 3$$