Polinomi di secondo grado

Un polinomio di secondo grado avrà questa forma

$$ax^2 + bx + c$$

Sicuramente sarà $a \neq 0$, altrimenti il polinomio sarà di primo grado. Se anche gli altri due coefficienti sono diversi da zero, si dice che il polinomio è *completo*. Ognuno dei coefficienti, se diverso da zero, puà essere positivo o negativo, anche se la maggior parte delle volte verranno considerati solo quelli in cui a è positivo.

Discriminante di un polinomio di secondo grado

In questo paragrafo verranno considerati solo polinomi completi con a positivo. Il discriminante Δ di un polinomio di secondo grado si calcola attraverso la formula

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Da notare che

- b^2 è sempre positivo, quindi il segno di b è ininfluente
- $-4ac$ ha il segno opposto a quello di c (dando per scontato che a sia positivo)

Ecco alcuni esempi:

	$3x^2 - 7x + 2$	$3x^2 + 2x + 1$	$2x^2 - x - 4$	$x^2 + 5x - 2$
$\Delta =$	$7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 49 - 24 = 25$	$2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 - 12 = -8$	$1^2 + 4 \cdot 2 \cdot 4 = 1 + 32 = 33$	$5^2 + 4 \cdot 1 \cdot 2 = 25 + 8 = 33$

Radice quadrata

La radice quadrata di un numero z, che si indica con $\sqrt{z}$, è il numero che, elevato al quadrato, dà proprio z. Dato che il quadrato di un numero non è mai negativo, la radice quadrata di un numero negativo non esiste. La radice quadrata di zero è 0 stesso. Per quanto riguarda i numeri positivi, la radice quadrata va sempre considerata come un numero a sua volta positivo. Ad esempio, la radice quadrata di 4 è 2 (nonostante anche il quadrato di -2 sia 4). Tutti i numeri positivi hanno una radice quadrata, ma in generale non è intera: quando lo è si dice che il numero è un *quadrato perfetto*. Ad esempio, la radice quadrata di 2 vale all'incirca $1,41421$: ma è meglio lasciarla indicata come $\sqrt{2}$. Ecco le radici quadrate dei più piccoli quadrati perfetti:

$$\sqrt{0} = 0 \qquad \sqrt{1} = 1 \qquad \sqrt{4} = 2 \qquad \sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt{16} = 4 \qquad \sqrt{25} = 5 \qquad \sqrt{36} = 6 \qquad \sqrt{49} = 7 \qquad \sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{81} = 9 \qquad \sqrt{100} = 10 \qquad \sqrt{121} = 11 \qquad \sqrt{144} = 12 \qquad \sqrt{169} = 13 \qquad \sqrt{196} = 14 \qquad \sqrt{225} = 15$$

Equazioni complete e intere di secondo grado

Dato un polinomio $P(x)$ di grado n, l'equazione $P(x) = 0$ (che ha appunto grado n) ha al più n soluzioni. Pertanto un'equazione di secondo grado ha fino a due soluzioni. Il segno del discriminante determina il numero di soluzioni, che sono due, una o nessuna a secondo che esso sia rispettivamente positivo, negativo o nullo.

Discrimante positivo

Se $\Delta > 0$ (discrimante positivo), le due soluzioni sono determinate dalla formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Da notare che $-b$ ha il segno opposto a quello di b (segno che, come visto, non ha alcuna importanza nel calcolo del discriminante), mentre $2a$ è semplicemente il doppio di a. Ecco alcuni esempi:

$3x^2+7x+2$ $\Delta = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 49 - 24 = 25$ $\sqrt{\Delta} = 5$	$6x^2-7x-3$ $\Delta = 7^2 + 4 \cdot 6 \cdot 3 = 49 + 72 = 121$ $\sqrt{\Delta} = 11$	$6x^2+5x-6$ $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6 = 25 + 144 = 169$ $\sqrt{\Delta} = 13$
$x = \frac{-7\pm5}{6} = \begin{matrix} \nearrow \frac{-7+5}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \\ \searrow \frac{-7-5}{6} = \frac{-12}{6} = -2 \end{matrix}$	$x = \frac{7\pm11}{12} = \begin{matrix} \nearrow \frac{7+11}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \\ \searrow \frac{7-11}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3} \end{matrix}$	$x = \frac{-7\pm5}{6} = \begin{matrix} \nearrow \frac{-5+13}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ \searrow \frac{-5-13}{12} = \frac{-18}{12} = -\frac{3}{2} \end{matrix}$

In questi esempi si salta un passaggio e si calcolano direttamente la somma/sottrazione della radice quadrata, evitandone la trascrizione.

$4x^2-15x+9$ $\Delta = 15^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 225 - 144 = 81$ $\sqrt{\Delta} = 9$	$9x^2+3x-2$ $\Delta = 3^2 + 4 \cdot 9 \cdot 2 = 9 + 72 = 81$ $\sqrt{\Delta} = 9$	$8x^2-10x-3$ $\Delta = 10^2 + 4 \cdot 8 \cdot 3 = 100 + 96 = 196$ $\sqrt{\Delta} = 14$
$x = \frac{15\pm9}{8} = \begin{matrix} \nearrow 24/8 = 3 \\ \searrow 6/8 = 3/4 \end{matrix}$	$x = \frac{-3\pm9}{18} = \begin{matrix} 6/18 = 1/3 \\ -12/18 = -2/3 \end{matrix}$	$x = \frac{10\pm14}{16} = \begin{matrix} 24/16 = 3/2 \\ -4/16 = -1/4 \end{matrix}$

Discrimante uguale a zero

Se $\Delta = 0$, la formula non cambia, ma diventa molto più semplice, in quanto viene a mancare la parte $\pm\sqrt{\Delta}$ nella formula: questo significa avere, come unica soluzione

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Dando ancora una volta per scontata la positività di a, il segno della soluzione è opposto a quello di b. Ecco alcuni esempi:

$9x^2+12x+4$ $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$	$x^2-8x+16$ $\Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$	$4x^2-4x+1$ $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$
$x = -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3}$	$x = \frac{8}{2} = 4$	$x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Discrimante negativo

Se $\Delta < 0$ (discrimante negativo), l'equazione non ha soluzione (è quindi impossibile). Ecco alcuni esempi:

$9x^2+6x+2$ $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 2 = 36 - 72 = -36$	x^2-2x+5 $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$	$x^2-6x+10$ $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 36 - 40 = -4$
Impossibile	*Impossibile*	*Impossibile*

Equazioni incomplete e intere di secondo grado

Nelle prime due delle quattro equazioni seguenti, manca il termine bx di primo grado: tali equazioni si dicono *pure*. Nelle ultime due manca il termine noto c: tali equazioni si dicono *spurie*. Ovviamente, quando manca un termine, significa che il suo coefficiente vale 0, pertanto possono essere risolte tramite il discriminante.

$4x^2-9=0$ $\Delta=0^2+4\cdot4\cdot9=144$ $\sqrt{\Delta}=12$	$16x^2+1=0$ $\Delta=0^2-4\cdot16\cdot1=-144$	$4x^2-7x=0$ $\Delta=7^2-4\cdot0\cdot7=49$ $\sqrt{\Delta}=7$	$6x^2+5x=0$ $\Delta=5^2-4\cdot6\cdot0=25$ $\sqrt{\Delta}=5$
$x=\frac{0\pm12}{8}=\pm\frac{12}{8}=\pm\frac{3}{2}$	*Impossibile*	$x=\frac{7\pm7}{8}=$ $\nearrow\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$ $\searrow\frac{0}{8}=0$	$x=\frac{-5\pm5}{6}=$ $\nearrow\frac{-5+5}{12}=\frac{0}{12}=0$ $\searrow\frac{-5-5}{12}=\frac{-10}{12}=-\frac{5}{6}$

In realtà esistono metodi più rapidi per risolvere le equazioni incomplete

Equazioni pure

Equazioni della forma $ax^2+c=0$ sono come delle equazioni di primo grado in cui si ha x^2 invece che x. Risolvendola, si ha

$$x^2=-\frac{c}{a}$$

. Se tale risultato è negativo, l'equazione è impossibile (nulla, elevato al quadrato, può essere negativo), altrimenti x è una coppia di valori opposti aventi la radice quadrata come valore assoluto. Cioè

$$x=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$$

Dando per scontata la positività di a, si può dire che un'equazione pura non ha soluzione quando c è anch'essa positiva. Ecco pertanto la risoluzione delle due equazioni pure viste in precedenza: si ottengono ovviamente gli stessi risultati (ma molto più in fretta).

$$4x^2-9=0 \qquad x=\pm\frac{9}{4}=\pm\frac{3}{2} \qquad\qquad 16x^2+1=0 \qquad \textit{Impossibile}$$

Equazioni spurie

Dato un polinomio P di qualunque grado, si ha che $P(0)$ dà come risultato il termine noto di P. Se P non ha termine noto, si ha $P(0)=0$, quindi 0 è una soluzione dell'equazione $P(x)=0$. è quello che succede nelle equazioni spurie, in cui manca il termine noto c. Inoltre, dividendo per x il polinomio ax^2+bx, si ottiene $ax+b$, un'equazione di primo grado la cui soluzione è $-b/a$, che è la seconda soluzione dell'equazione. In pratica, le soluzioni di un'equazione spuria sono:

$$x=0 \qquad\qquad x=-\frac{b}{a}$$

Eccole applicata ai due esempi citati in precedenza:

$$4x^2-7x=0 \qquad x=0\lor x=\frac{7}{4} \qquad\qquad 6x^2+5x=0 \qquad x=0\lor x=-\frac{5}{6}$$

Equazioni equivalenti

Applicando il principio di equivalenza secondo cui si possono moltiplicare e dividere per uno stesso numero i termini di un'equazione, risulta che in un'equazione $P(x) = 0$ si può sostituire il polinomio con uno proporzionale (ovviamente il termine a destra 0 resta immutato).

Cambio di segno

Una delle prime applicazioni consiste nel cambiare i segni (ossia moltiplicare per -1), operazione molto utile quando il coefficiente a è negativo: ecco perché si può sempre dare per scontato che a sia positivo. In questo esempio, viene risolta un'equazione con a negativo (da notare che in questo caso $-4ac$ assume il segno di c, dal momento che $-4a$ è positivo) e poi quella in cui i segni vengono cambiati: quest'ultima opzione semplifica molto i calcoli, avendo meno segni negativi da gestire, dando comunque lo stesso risultato.

$$\begin{array}{c|c}
-6x^2 + 7x + 3 = 0 & 6x^2 - 7x - 3 = 0 \\
\Delta = 7^2 + 4 \cdot 6 \cdot 3 = 49 + 72 = 121 & \Delta = 7^2 + 4 \cdot 6 \cdot 3 = 49 + 72 = 121 \\
\sqrt{\Delta} = 11 & \sqrt{\Delta} = 11 \\
x = \frac{-7 \pm 11}{-12} = \begin{array}{l} \nearrow \frac{4}{-12} = -\frac{1}{3} \\ \searrow \frac{-18}{-12} = \frac{3}{2} \end{array} & x = \frac{7 \pm 11}{12} = \begin{array}{l} \nearrow \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \\ \searrow \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3} \end{array}
\end{array}$$

Riduzione

Il polinomio si dice *ai minimi termini* se non vi è alcun divisore comune (1 escluso) ai tre termini. Se ve ne sono, dividendo i tre termini per il massimo divisore comune si ottiene una nuova equazione, con numeri inferiori. Ecco un esempio in cui si risolve un'equazione e poi la sua riduzione (in questo caso i coefficienti vengono divisio per 6)

$$\begin{array}{c|c}
12x^2 - 30x + 12 = 0 & 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\
\Delta = 30^2 - 4 \cdot 12 \cdot 12 = 900 - 576 = 324 & \Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 \\
\sqrt{\Delta} = 18 & \sqrt{\Delta} = 3 \\
x = \frac{30 \pm 18}{24} = \begin{array}{l} \nearrow \frac{48}{24} = 2 \\ \searrow \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \end{array} & x = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{array}{l} \nearrow \frac{8}{4} = 2 \\ \searrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{array}
\end{array}$$

Coefficienti frazionari

Come nelle equazioni di primo grado, in presenza di denominatori, si portano i coefficienti allo stesso denominatore e poi quest'ultimo viene ignorato (il che equivale a dire che i coefficienti vengono moltiplicati per tale denominatore). Ecco un esempio: rendere interi i coefficienti evita di avere a che fare con operazioni con frazioni.

$$\begin{array}{c|c}
x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0 & 6x^2 - x - 2 = 0 \\
\Delta = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{36} + \frac{4}{3} = \frac{1+48}{36} = \frac{49}{36} & \Delta = 1^2 + 4 \cdot 6 \cdot 2 = 1 + 48 = 9 \\
\sqrt{\Delta} = \frac{7}{6} & \sqrt{\Delta} = 7 \\
x = \frac{\frac{1}{6} \pm \frac{7}{6}}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \frac{8/6}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \\ \searrow \frac{-6/6}{2} = -1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{array} & x = \frac{1 \pm 7}{12} = \begin{array}{l} \nearrow \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ \searrow \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2} \end{array}
\end{array}$$

Equazioni equivalenti

Queste operazioni possono anche essere combinate tra di loro: l'ordine è indifferente, ma il più indicato è quello di cominciare dai denominatori, e a seguire il segno.

$$-6x^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad -12x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad 12x^2 + 12x - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$\Delta = 4^2 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 16 + 48 = 64 \qquad \sqrt{\Delta} = 8 \qquad x = \frac{-4 \pm 8}{8} = \begin{array}{l} \nearrow \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ \searrow \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2} \end{array}$$