Grafico di una parabola

Una parabola con asse verticale (sarà l'unico tipo di parabola che verrà preso in considerazione), è il grafico della funzione $y = P(x)$ dove $P(x)$ èun polinomio di secondo grado. Pertanto una parabola ha equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

Si è visto in precedenza come l'associata equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha fino a due soluzioni. Queste corrispondono sono all'intersezione con l'asse orizzontale. In maniera analoga alla retta, il termine noto c corrisponde all'intersezione con l'asse verticale. Il segno di a determina se la parabola è rivolta verso l'alto (se positivo) o verso il basso (se negativo). Un altro elemento fondamentale della parabola è il vertice, ovvero il punto più basso della parabola (se rivolta verso l'alto) o il più alto (se rivolta verso il basso). Il vertice ha coordinate

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

La retta verticale passante per il vertice è l'asse di simmetria della parabola.

Parabola rivolta verso l'alto

Ecco un esempio:

$$y = x^2 - 6x + 8$$

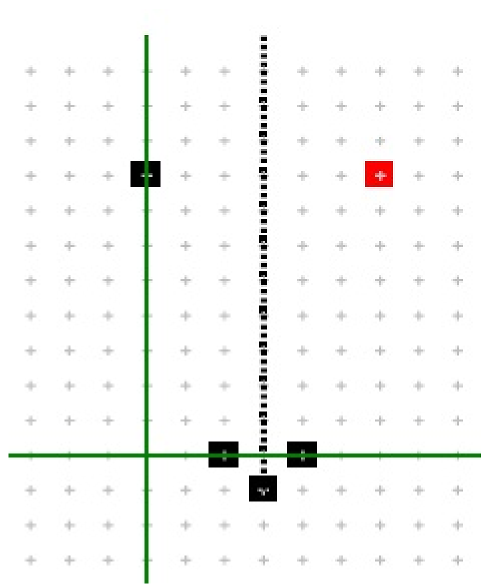
Per intanto si risolve l'equazione associata (da notare che Δ verrà usato anche per il vertice):

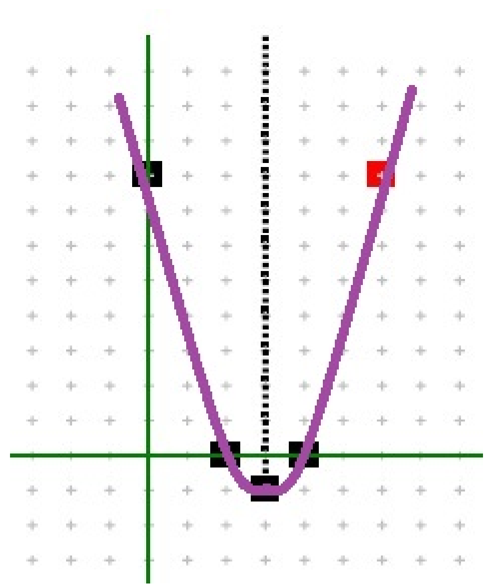
$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4 \qquad \sqrt{\Delta} = 2 \qquad x = \tfrac{6 \pm 2}{2} \begin{array}{l} \nearrow \quad \tfrac{6+2}{2} = \tfrac{8}{2} = 4 \\ \searrow \quad \tfrac{6-2}{2} = \tfrac{4}{2} = 2 \end{array}$$

Ecco ora gli elementi caratterizzanti, ricordando che i punti sull'asse x hanno coordinata y nulla e viceversa.

Intersezioni asse x : $(4;0)$ $(2;0)$ Intersezione asse y : $(0;2)$ Vertice : $\left(-\frac{-6}{2}, -\frac{4}{4}\right) = (3, -1)$

Ora si disegnano questi punti e l'asse di simmetria: di quest'ultimo basta tracciare la semiretta sopra il vertice.
Nel grafico qui sotto a sinistra è stato disegnato (in rosso) un ulteriore punto: quello simmetrico (rispetto all'asse della parabola) all'intersezione con l'asse y. Si noti inoltre che le intersezioni con l'asse orizzontale sono in simmetria rispetto all'asse. Nel grafico a destra i punti sono stati collegati.



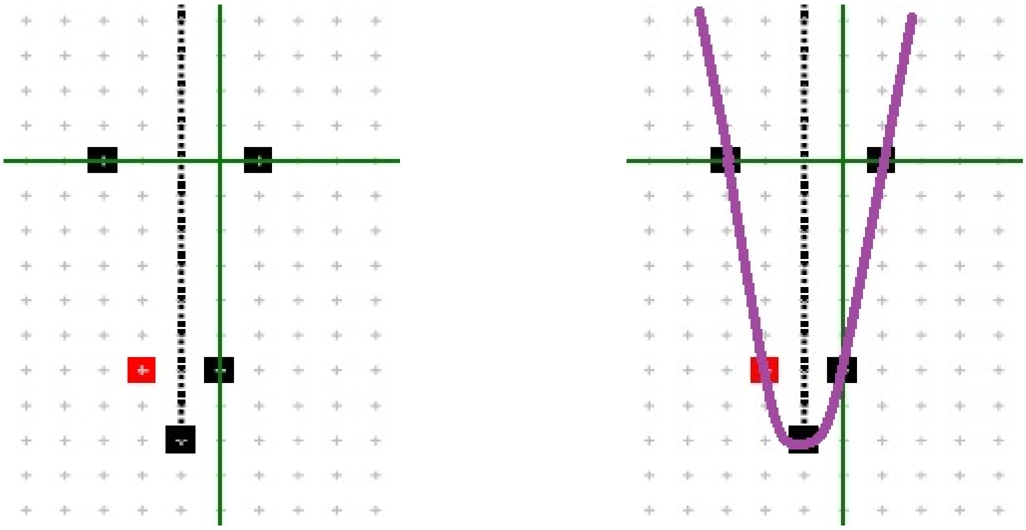


Ecco un altro esempio: per risolvere l'equazione, i coefficienti del polinomio potrebbero anche essere divisi per 2, ma non ne vale la pena, dato che per altri elementi della parabola serve il polinomio originale.

$$y = 2x^2 + 4x - 6$$

$$\Delta = 4^2 + 4 \cdot 2 \cdot 6 = 16 + 48 = 64 \quad \sqrt{\Delta} = 8 \quad x = \frac{-4 \pm 8}{4} \begin{array}{l} \nearrow \quad \frac{-4+8}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ \searrow \quad \frac{-4-8}{4} = \frac{-12}{4} = -3 \end{array}$$

Intersezioni asse x : $\quad (1; 0) \quad (-3; 0)$ $\qquad$ Intersezione asse y : $\quad (0; -6)$ $\qquad$ Vertice : $\left(-\frac{-4}{4}, -\frac{-64}{8}\right) = (-1, -8)$

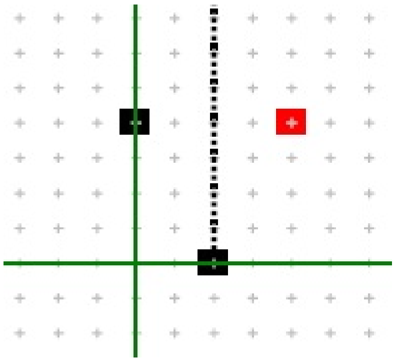


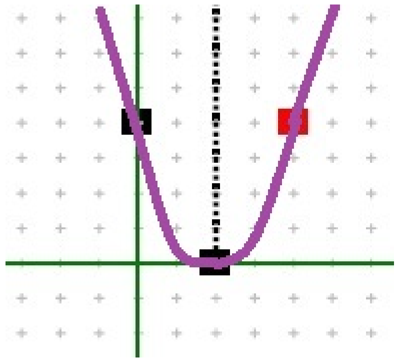
Se il discriminante è nullo, l'unica soluzione $\frac{-b}{2a}$ coincide con la coordinata orizzontale del vertice, la cui y è invece nulla (dato che vale $\frac{-\Delta}{4a}$ vale 0 in questo caso): cioè il vertice coincide con l'unica intersezione. Ecco un esempio:

$$y = x^2 - 4x + 4 \qquad \Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0 \qquad x = \frac{4}{2} = 2$$

Intersezione asse x : $(2; 0)$ Intersezione asse y : $(0; 4)$ Vertice : $\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{-0}{8}\right) = (2, 0)$

Il vertice è stato ricalcolato, ma non sarebbe stato necessario, in quanto coincidente con l'interserzione della parabola con asse x.

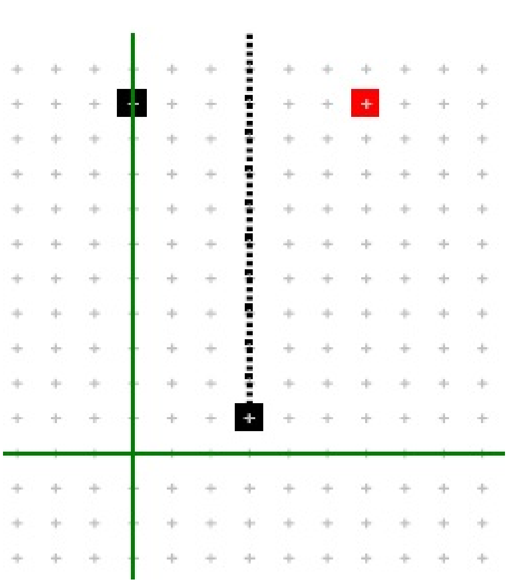


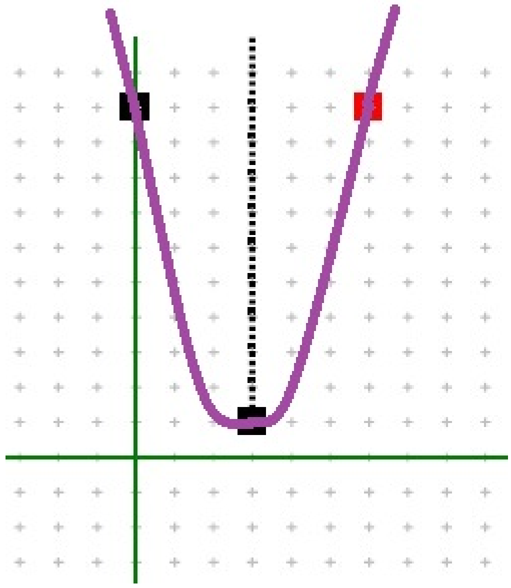


Se il discriminante è negativo, non c'è alcuna intersezione: la parabola giace interamente sopra l'asse orizzontale

$$y = x^2 - 6x + 10 \qquad \Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 36 - 40 = -4$$

Nessuna intersezione asse x Intersezione asse y : $(0; 10)$ Vertice : $\left(\frac{6}{2}, \frac{4}{4}\right) = (3, 1)$

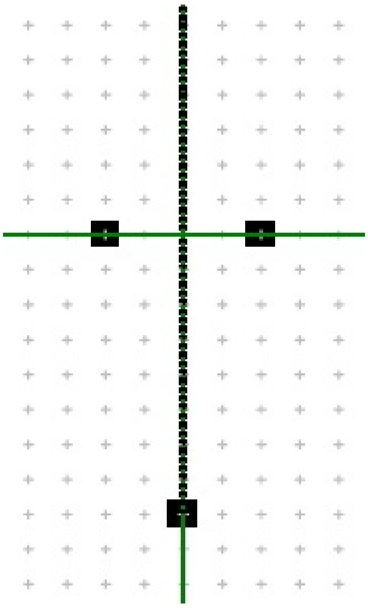
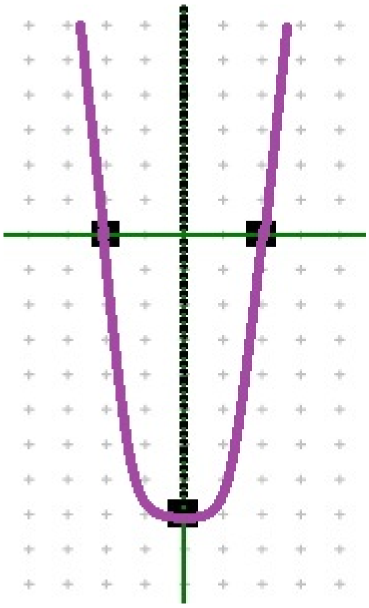




Fino a questo momento si sono considerate solo parabole la cui equazione associata è completa. Un altro caso importante è quello in cui manca il coefficiente di primo grado b. In questo caso la coordinata x del vertice (uguale a $-b/(2a)$, con $b = 0$) è nulla, pertanto il vertice coincide con l'intersezione con l'asse verticale. Un esempio con c negativa (dunque che interseca l'asse orizzontale):

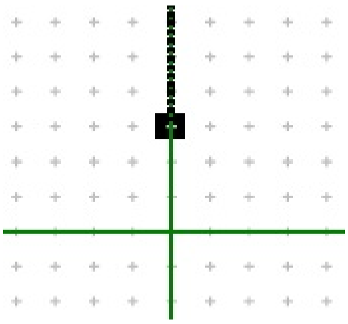
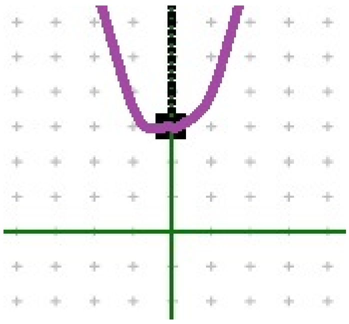
$$y = 2x^2 - 8 \qquad x = \pm\sqrt{\frac{8}{2}} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Intersezioni asse x : $(2; 0)$ $(-2; 0)$ Intersezione asse y : $(0; -8)$

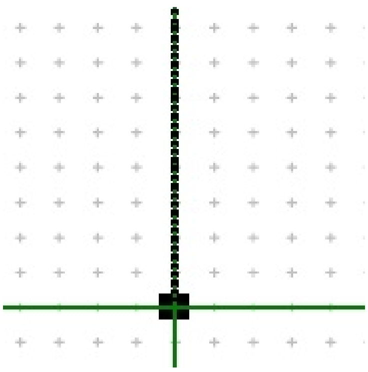
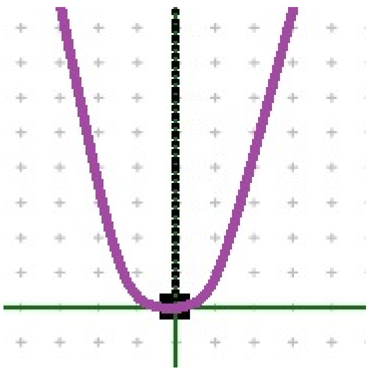



Ecco ora un esempio in cui la c è è positiva, pertanto non vi è alcuna intersezione con l'asse orizzontale:

$y = 3x^2 + 3$ Intersezione asse y : $(0; 3)$

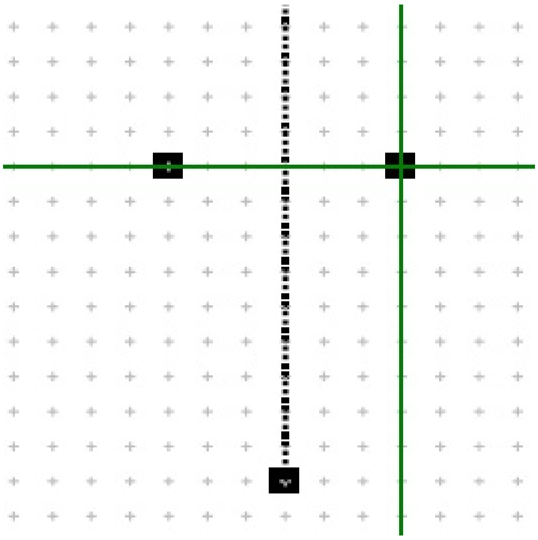
Nel caso di un'equazione monomia, cioè in cui manca anche c, dal monento che l'unica soluzione è $x = 0$, segue che l'unica intersezione con gli assi è l'origine, che funge anche da vertice: il parametro a non ha alcuna influenza sui punti fondamentali della parabola (ne ha sulla larghezza della parabola, ma questo aspetto non viene qui preso in considerazione).

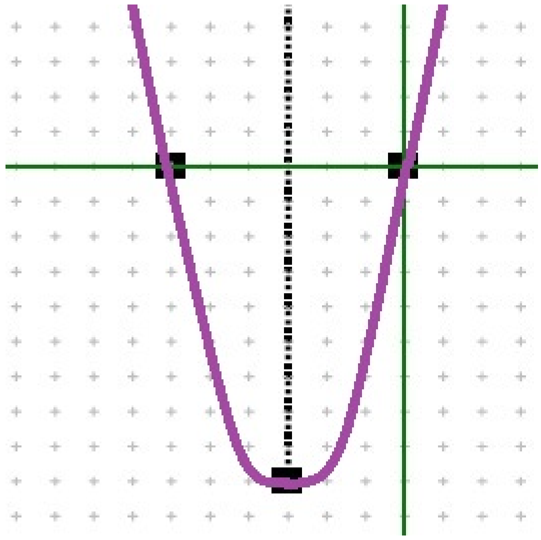



Nel caso di un'equazione priva del termine noto c (le cui soluzioni sono $x = 0$ e $x = -b/a$) si risolve normalmente. Da notare che il parametro Δ (che serve per la coordinata del vertice), che in generale vale $b^2 - 4ac$ si limita a b^2 nel caso in cui $c = 0$, dove la coordinata vertivcale del vertice è quindi $\Delta/(4a) = b^2/(4a)$. Ecco un esempio:

$$y = 2x^2 - 8x \qquad x = 0 \quad x = \frac{8}{2} = 4$$

Intersezioni asse x : $(2; 0)$ $(-2; 0)$ Intersezione asse y : $(0; -8)$





Riassumento, va ricordato che

- Se il determinante è nullo, non serve calcolare il vertice in quanto coincide con l'unica intersezione con l'asse orizzontale
- Se il determinante è negativo, non c'è alcuna intersezione con l'asse orizzontale
- Se l'equazione è pura (priva del termine di primo grado b), non serve calcolare il vertice in quanto coincide con l'intersezione con l'asse verticale (che funge anche da asse della parabola).
- Se l'equazione è spuria (priva del termine noto c), il discriminante Δ si riduce a b^2 e il grafico passa per l'origine.
- Se l'equazione è monomia (con il solo termine di secondo grado a), il vertice è sull'origine, che è anche l'unica intersezione con gli assi cartesiani

Parabola rivolta verso il basso

Nella risoluzione delle equazioni di secondo grado si era visto che, cambiando di segno i coefficienti, si ottiene un'equazione equivalente, il che rende la risoluzione più facile quando il suo coefficiente direttore è negativo. Il grafico di una parabola con coefficiente direttore negativo ha nel suo vertice il punto più alto, ed è il ribaltamento in verticale di quella opposta. Pertanto, i punti fondamentali di una parabola rivolta verso il basso si ottengono cambiando di segno alle coordinate y di quella rivolta verso l'alto. In altre parole si ha che:

- Le eventuali intersezioni con l'asse orizzontale rimangono inalterate (avendo coordinata y nulla)
- L'intersezione con l'asse verticale si cambia di segno (ottenendo la c della parabola originale)
- Del vertice si cambia solo la coordinata verticale, lasciando inalterata quella orizzontale

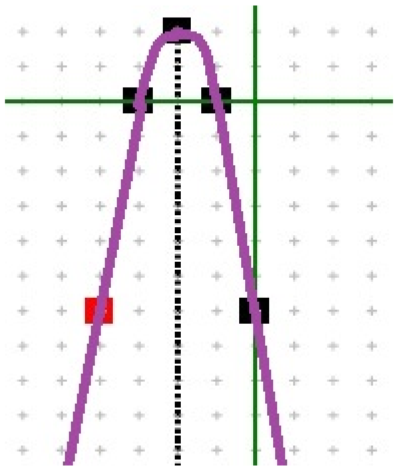
Ecco un esempio: si cambiano di segno i coefficienti e, dimenticando quelli originali, si calcolano le soluzioni e le coordinate del vertice. Nella rappresentazione grafica, dell'asse basta rappresentare la semiretta al di sotto (contrariamente alle parabole rivolte verso l'alto) del vertice.

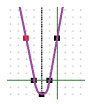
$$y = -2x^2 - 8x - 6 \qquad \text{Coefficienti opposti: } 2x^2 + 8x + 6$$

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 64 - 48 = 16 \qquad \sqrt{\Delta} = 4 \qquad x = \frac{-8 \pm 4}{4} \begin{array}{l} \nearrow \ \frac{-4}{4} = -1 \\ \searrow \ \frac{-12}{4} = -3 \end{array} \qquad -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{4} = -2 \qquad -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{8} = -2$$

Nella seguente tabella si riportano i punti fondamentali della parabola rivolta verso l'alto e di quella rivolta verso il basso. A seguire il grafico della parabola e, in formato ridottissimo (a titolo puramente indicativo), quello della parabola rivolta verso l'alto.

	$\smile$	$\frown$
Inters. x	$(-1;0)$ $(-3;0)$	$(-1;0)$ $(-3;0)$
Inters. y	$(0;6)$	$(0;-6)$
Vertice	$(-2;-2)$	$(-2;2)$





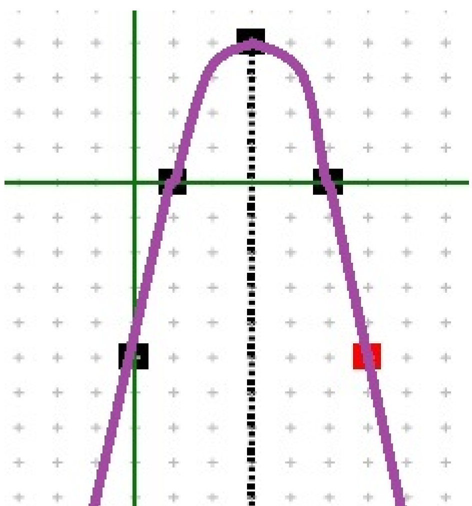
Ecco un altro esempio:

$$y = -x^2 + 6x - 5 \qquad \text{Coefficienti opposti: } x^2 - 6x + 5$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16 \qquad \sqrt{\Delta} = 4 \qquad x = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{array}{l} \nearrow \ \frac{10}{2} = 5 \\ \searrow \ \frac{2}{2} = 1 \end{array} \qquad -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3 \qquad -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4} = -4$$

Ora i punti fondamentali e il grafico

	$\smile$	$\frown$
Inters. x	$(1;0)$ $(5;0)$	$(1;0)$ $(5;0)$
Inters. y	$(0;5)$	$(0;-5)$
Vertice	$(3;-4)$	$(3;4)$

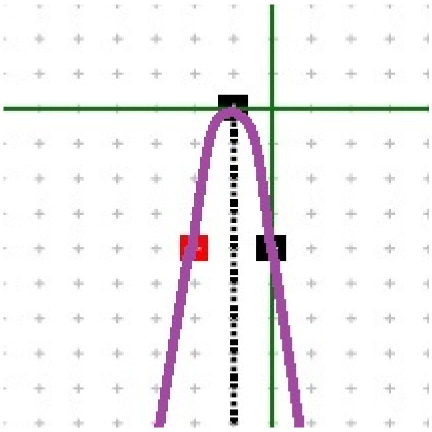


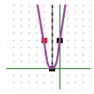
Ecco ora una serie di altri esempi.

$$y = -4x^2 - 8x - 4$$
$$\text{Coord. opposte} \quad 4x^2 + 8x + 4$$

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 - 64 = 0$$
$$x = -8/8 = -1$$

	$\smile$	$\frown$
Inters. x	$(-1; 0)$	$(-1; 0)$
Inters. y	$(0; 4)$	$(0; -4)$



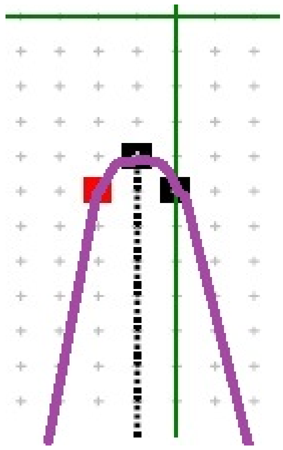


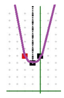
$$y = -x^2 - 2x - 5$$
$$\text{Coord. opposte} \quad x^2 + 2x + 5$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = -1 \qquad -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-16}{4} = 4$$

	$\smile$	$\frown$
Inters. y	$(0; 5)$	$(0; -5)$
Vertice	$(-1; 4)$	$(-1; -4)$



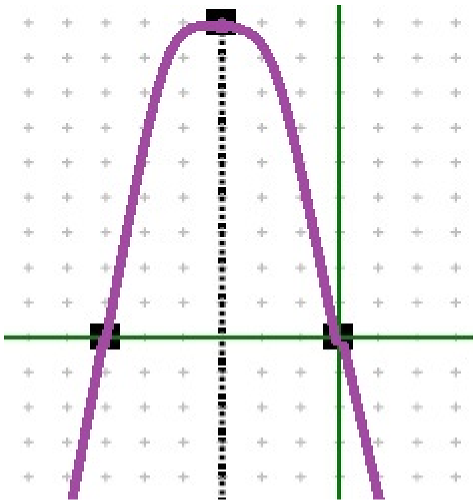


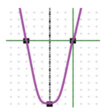
$$y = -x^2 - 6x$$
$$\text{Coord. opposte} \quad x^2 + 6x$$

$$x = 0 \vee x = -\frac{6}{1} = -6$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2} = -3 \qquad -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{6^2}{4} = -9$$

	$\smile$	$\frown$
Inters. x	$(-6; 0)$ $(0; 0)$	$(-6; 0)$ $(0; 0)$
Inters. y	$(0; 0)$	$(0; 0)$
Vertice	$(-3; -9)$	$(-3; 9)$



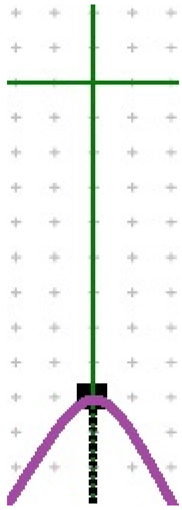


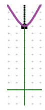
$y = -x^2 - 9$

Coord. opposte $\quad x^2 + 9$

Nessuna intersezione

	$\smile$	$\frown$
Inters. y	$(0; 9)$	$(0; -9)$



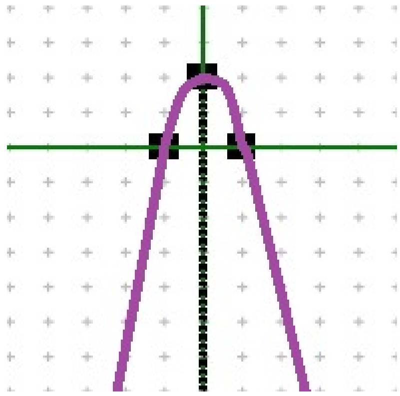


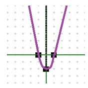
$y = -2x^2 + 2$

Coord. opposte $\quad 2x^2 - 2$

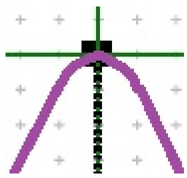
$x = \pm\frac{2}{2} = \pm 1$

	$\smile$	$\frown$
Inters. x	$(-1; 0) \quad (1; 0)$	$(-1; 0) \quad (1; 0)$
Inters. y	$(0; -2)$	$(0; 2)$





$y = -3x^2$



$y = -x^2 - 6x$

Coord. opposte $\quad x^2 + 6x$

$x = 0 \vee x = -\frac{6}{1} = -6$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2} = -3 \qquad -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{6^2}{4} = -9$

	$\smile$	$\frown$
Inters. x	$(-6; 0) \quad (0; 0)$	$(-6; 0) \quad (0; 0)$
Inters. y	$(0; 0)$	$(0; 0)$
Vertice	$(-3; -9)$	$(-3; 9)$